Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 3

Η Μέθοδος των Βρόχων

του Νικολάου Παπαμάρκου

Με βάση το βιβλίο Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Τόμος ΑΒ

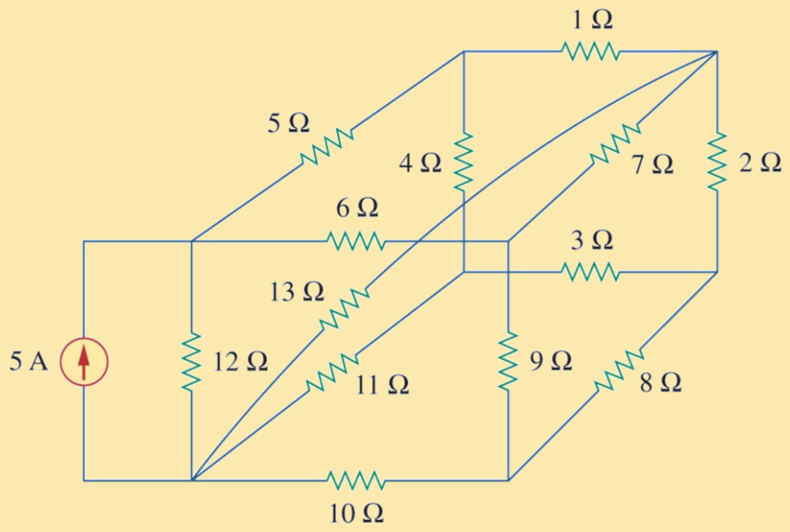
Μέθοδος Βρόχων

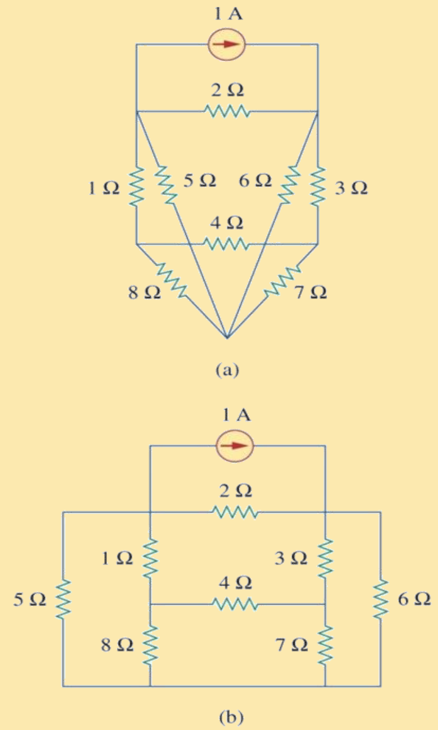
Μια άλλη γενική διαδικασία για την ανάλυση των κυκλωμάτων είναι η χρήση της μεθόδου των βρόχων.

Επισημαίνεται ότι:

- Ένας βρόχος είναι μια κλειστή διαδρομή που περνάει από κάθε κόμβο μόνο μία φορά.
- Ένας βρόχος δεν περιέχει άλλο βρόχο μέσα του.
- Η ανάλυση των κυκλωμάτων με τη μέθοδο των βρόχων βασίζεται στον νόμο των τάσεων του Kirchhoff για να βρει τα άγνωστα ρεύματα
- Η μέθοδος των βρόχων μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε “επίπεδα” κυκλώματα.

Επίπεδα και μη επίπεδα κυκλώματα





Μη επίπεδο κύκλωμα λόγω της ύπαρξης του κλάδου με την αντίσταση των 13Ω

Επίπεδο κύκλωμα: Μπορεί να επανασχεδιαστεί όπως στο Σχ. (b)

Ρεύματα Βρόχων

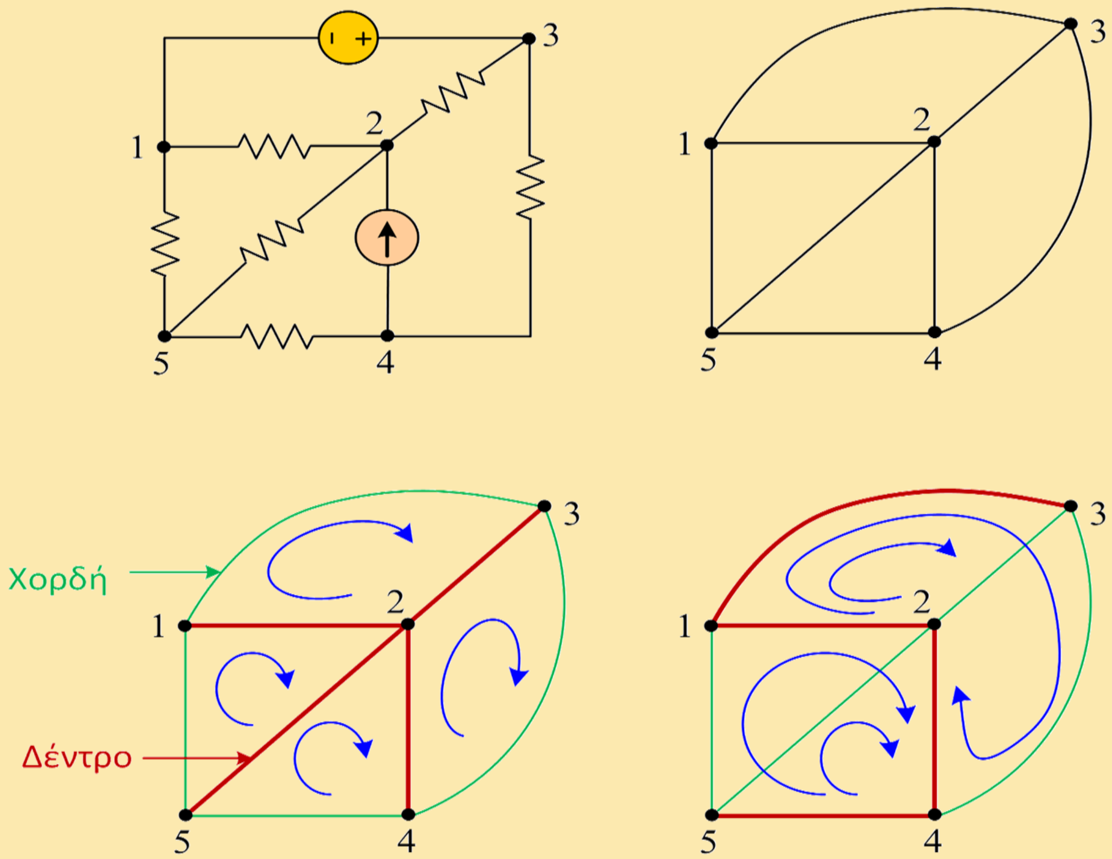
Ένα κύκλωμα που αποτελείται από *n* κόμβους και *b* κλάδους

έχει L=*b-n+1* **ανεξάρτητους βρόχους** και άρα *b-n+1* **ρεύματα βρόχων**.

Ρεύμα Βρόχου = ρεύμα που θεωρητικά κυκλοφορεί στο βρόχο.

Το ρεύμα κλάδου, ανάλογα με τη φορά του, είναι ίσο είτε με το ρεύμα του βρόχου που ο κλάδος ανήκει είτε με το αλγεβρικό άθροισμα των δύο ρευμάτων βρόχων που ο κλάδος ανήκει.

Καθορισμός Βρόχων



Κόμβοι n=6   Κλάδοι b=8

Πλήθος ανεξάρτητων βρόχων   b-n+1=4

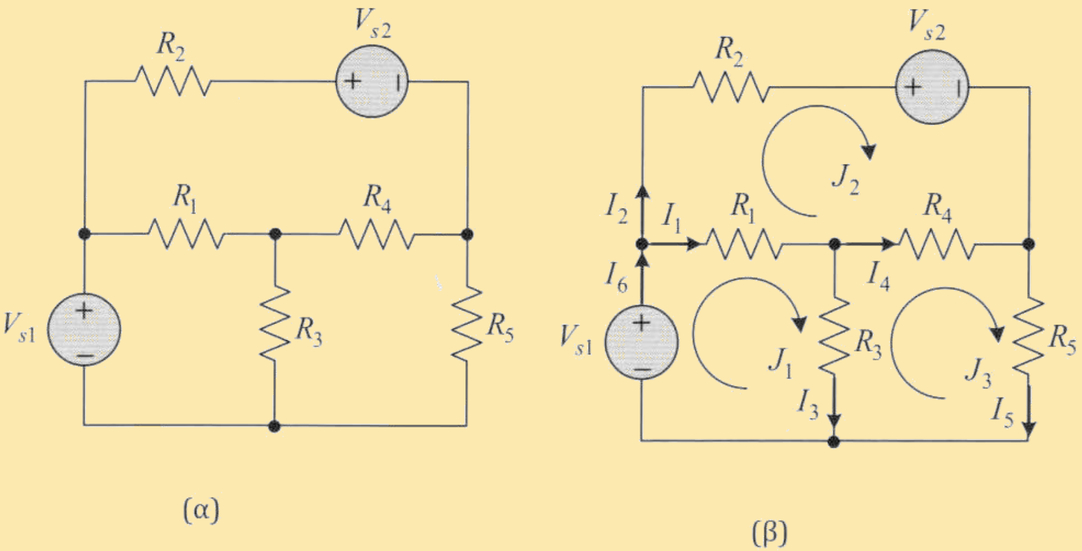
Βήματα της μεθόδου

- Η μέθοδος των βρόχων ξεκινά με τον καθορισμό των ανεξάρτητων βρόχων.
- Η επιλογή των βρόχων μπορεί να γίνει συστηματικά.
- Μετά τον καθορισμό των βρόχων σημειώνονται τα ρεύματα των βρόχων και οι φορές τους.
- Συνήθως τα ρεύματα των βρόχων καθορίζουμε να έχουν την ίδια φορά, που κατά κανόνα ταυτίζεται με τη φορά κίνησης των δεικτών του ωρολογίου. Μπορούμε όμως να καθορίσουμε αυθαίρετα τις φορές.
- Η εξίσωση κάθε βρόχου προκύπτει από την εφαρμογή του ΝΤΚ στην περιφέρεια του βρόχου. Με απλά λόγια, αυτό σημαίνει ότι "σε ένα βρόχο το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων ισούται με μηδέν".
- Παίρνοντας τις εξισώσεις των βρόχων καταλήγουμε πάντα σε ένα σύστημα εξισώσεων με άγνωστες μεταβλητές τα ρεύματα των βρόχων.
- Λύνοντας το σύστημα αυτό προσδιορίζουμε τα ρεύματα βρόχων με τα οποία κατόπιν εύκολα επιλύουμε το κύκλωμα, δηλαδή προσδιορίζουμε εύκολα τα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος.

Ρεύματα Βρόχων

Παράδειγμα: n = 4 κόμβους, b = 6 κλάδους. Άρα έχουμε 6-4+1=3 βρόχους.

Ορίζουμε 3 βρόχους και ρεύματα κλαδων συναρτήσει βρόχων.



$$I_1 = J_1 - J_2$$

$$I_2 = J_2$$

$$I_3 = J_1 - J_3$$

$$I_4 = J_3 - J_2$$

$$I_5 = J_3$$

$$I_6 = J_1$$

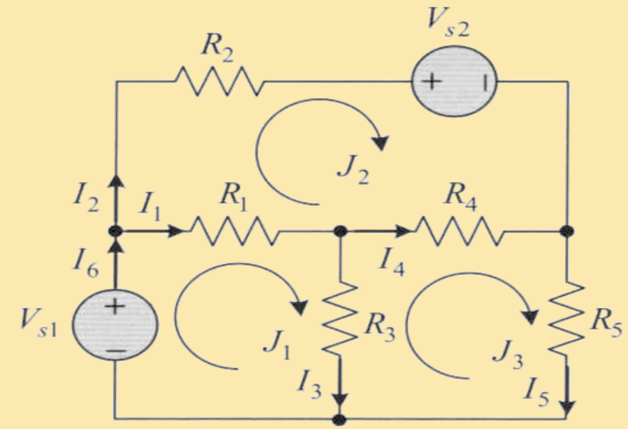
Με μορφή πινάκων αυτά γράφονται:

$$M^T J = I \qquad \text{όπου} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ρεύματα Βρόχων

Αν εφαρμόσουμε ΝΤΚ έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow MV = 0$$



(β)

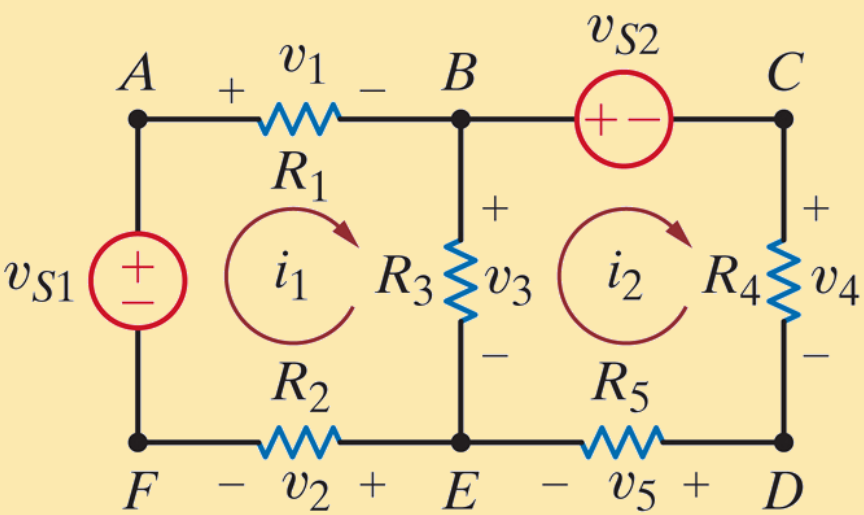
όπου $V_i, i = 1,\dots,6$ οι τάσεις των κλάδων. Δηλαδή

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 R_1 \\ V_2 &= I_2 R_2 + V_{s2} \\ V_3 &= I_3 R_3 \\ V_4 &= I_4 R_4 \\ V_5 &= I_5 R_5 \\ V_6 &= -V_{s1} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $M^T J = I$ και $MV = 0$

Γενικές Εξισώσεις που μπορούν να αυτοματοποιήσουν Μέθοδο Βρόχων

Παράδειγμα



$b = 7$
$n = 6$
$L = 7 - 6 + 1 = 2$

Τα δύο ρεύματα i_1, i_2 είναι Τα ρεύματα των βρόχων

Εφαρμογή της μεθόδου των βρόχων

ΝΤΚ στον αριστερό βρόχο

$$v_1 + v_3 + v_2 = v_{S1}$$

ΝΤΚ στον δεξιό βρόχο

$$v_4 + v_5 - v_3 = -v_{S2}$$

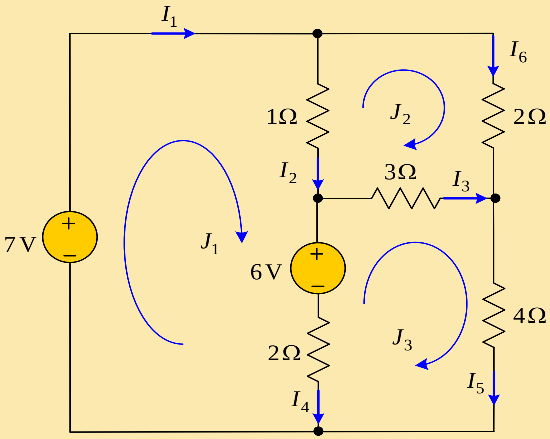
Είναι:

$$v_1 = i_1 R_1, v_2 = i_1 R_2, v_3 = (i_1 - i_2) R_3$$
$$v_4 = i_2 R_4, v_5 = i_2 R_5$$

Με αντικατάσταση καταλήγουμε τελικά στις ακόλουθες εξ. βρόχων

$$i_1(R_1 + R_2 + R_3) - i_2(R_3) = v_{S1}$$
$$-i_1(R_3) + i_2(R_3 + R_4 + R_5) = -v_{S2}$$

Παράδειγμα 2ο



Το κύκλωμα έχει 4 κόμβους και 6 κλάδους, άρα θα έχει ανεξάρτητους βρόχους. Οι βρόχοι που επελέγησαν δείχνονται στο σχήμα ενώ με J_1, J_2, J_3 έχουμε συμβολίσει τα ρεύματά τους. Οι τρεις εξισώσεις βρόχων του κυκλώματος είναι:

$$\text{βρόχος 1: } 3J_1 - J_2 - 2J_3 = 7 - 6 = 1$$

$$\text{βρόχος 2: } -J_1 + 6J_2 - 3J_3 = 0$$

$$\text{βρόχος 3: } -2J_1 - 3J_2 + 9J_3 = 6$$

Με τη μορφή πινάκων:

$$RJ = V_s$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{V_s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 135 \\ 54 \\ 36 \\ 18 \\ 117 \\ 81 \end{bmatrix} \mathrm{A}$$

Αυτό το οποίο μπορούμε να παρατηρήσουμε για τον πίνακα ***R*** είναι ότι
(α) Είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιό του.
(β) Όλα τα στοιχεία του είναι αρνητικά εκτός από τα στοιχεία της διαγωνίου του.
(γ) Οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του ισούνται με το άθροισμα των αντιστάσεων σε κάθε βρόχο.
(δ) Τα λοιπά στοιχεία είναι ίσα με τις αρνητικές αντιστάσεις των κλάδων που διαχωρίζουν τους βρόχους.

Οι τιμές του πίνακας $\boldsymbol{V_s}$ είναι ίσες με το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης (θετικές είναι οι πηγές που το ρεύμα βρόχου έχει φορά από το – προς το + των πηγών).

Συστηματική Γραφή Εξισώσεων Βρόχων

Σε κυκλώματα χωρίς εξαρτημένες πηγές, οι εξισώσεις κόμβων οδηγούν στο παρακάτω γραμμικό σύστημα.

$$RJ = V_s$$

όπου $V_s = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & .... & v_{n-1} \end{bmatrix}^T$ Άθροισμα Πηγών τάσης στον βρόχο *k*. Θετικές όταν η φορά βρόχου ταυτίζεται με - + .

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & .... & J_{n-1} \end{bmatrix}^T$$

Άγνωστα ρεύματα βρόχων

$$R = \begin{bmatrix} R_{1,1} & \dots & R_{1,n-1} \\ \dots & R_{k,k} & \dots \\ R_{n-1,1} & \dots & R_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

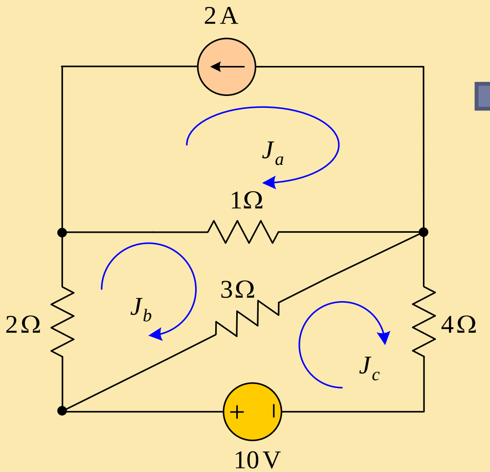
Συμμετρικός πίνακας:

Διαγώνια $R_{k,k}$ θετικά, ίσα με το άθροισμα των αντιστάσεων στο βρόχο *k*.

Μη-διαγώνια $R_{m,n}$ αρνητικά, ίσα με αρνητικό άθροισμα αντιστάσεων στον κλάδο σύνορο των βρόχων *m*, *n*.

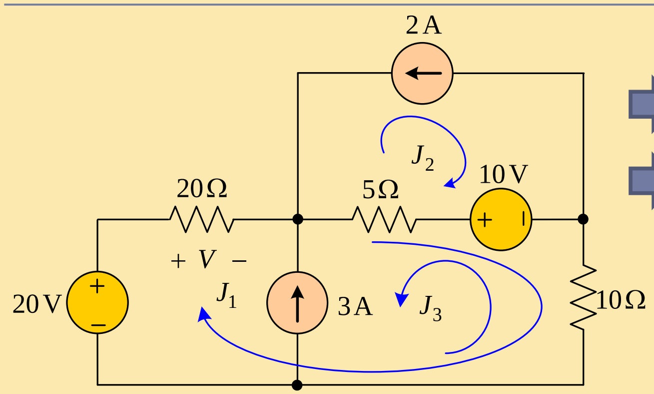
Μέθοδος Βρόχων με προφανείς εξισώσεις

Σε κυκλώματα με πηγές ρεύματος, μπορούμε με σωστή επιλογή βρόχων, να διευκολύνουμε την εύρεση των ρευμάτων βρόγχων.



$$\left.\begin{aligned} J_a &= -2\,\mathrm{A} \\ -J_a + 6J_b - 3J_c &= 0 \\ -3J_b + 7J_c &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} J_b &= \frac{-14}{33}\,\mathrm{A} \\ J_c &= \frac{-6}{33}\,\mathrm{A} \end{aligned}\right.$$

Πρέπει από κάθε πηγή ρεύματος να περνάει ένα μόνο ρεύμα βρόχου

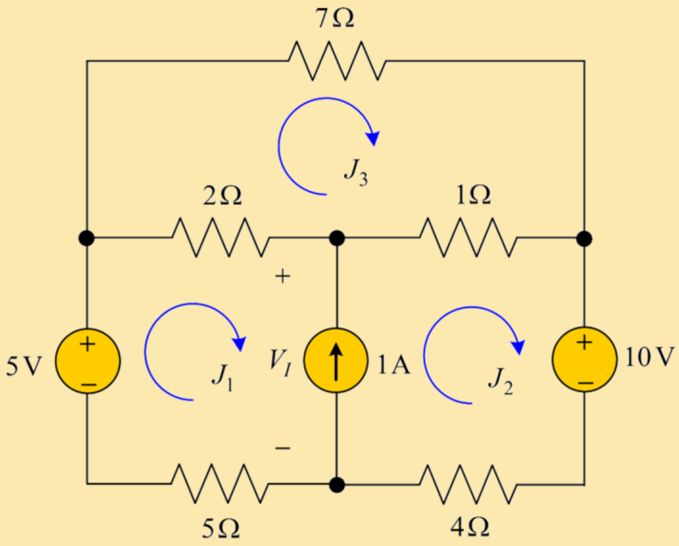


$$\left.\begin{aligned} J_2 &= -2\,\mathrm{A} \\ J_3 &= -3\,\mathrm{A} \\ 35J_1 - 5J_2 - 15J_3 &= 20 - 10 = 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow J_1 = -\frac{9}{7}\,\mathrm{A}$$

Υπερβρόχος

Υπάρχουν περιπτώσεις που δε μπορούμε να εκφράσουμε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας πηγής ρεύματος.

Μένει ως άγνωστος η τάση στα άκρα της πηγής ρεύματος, πχ.



Στον πρώτο βρόχο γράφουμε:

$$5 = 2(J_1 - J_3) + V_1 + 5J_1$$

Στο δεύτερο έχουμε:

$$V_1 = 1(J_2 - J_3) + 10 + 4J_2$$

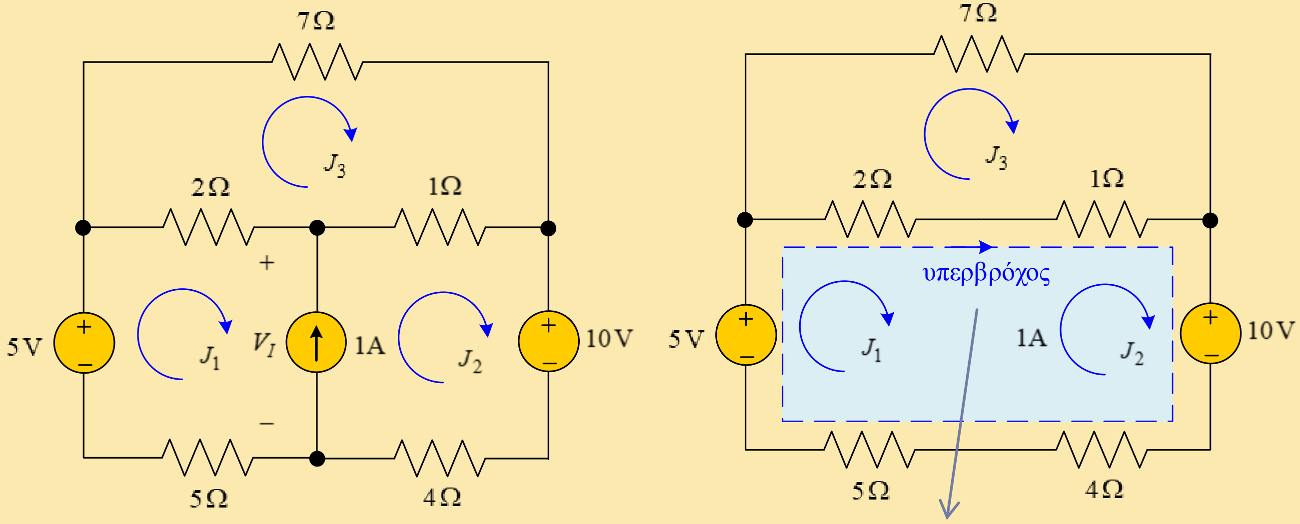
Ξέρουμε βέβαια ότι:

$$J_2 - J_1 = 1$$

Μένει ως άγνωστος το V_1.

Υπερβρόχος

Εφαρμόζουμε τη λύση του **υπερβρόχου**. Αφαιρούμε τον κλάδο της πηγής ρεύματος και παίρνουμε τον εξωτερικό υπερβρόχο.



Βλέπουμε ότι: $$5 = 2(J_1 - J_3) + 1(J_2 - J_3) + 10 + 4J_2 + 5J_1$$

Μέσα στον υπερβρόχο $$J_2 - J_1 = 1$$

Στο Βρόχο 3 $$7J_3 + (J_3 - J_2) + 2(J_3 - J_1) = 0$$

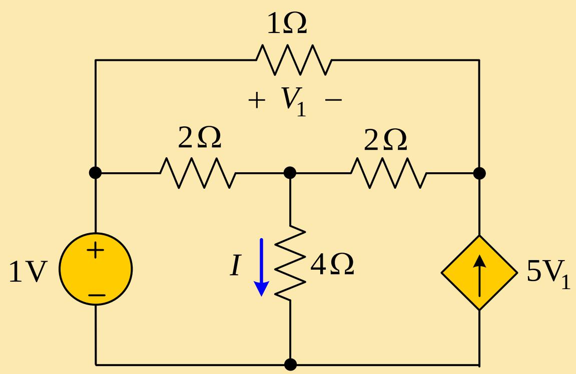
Μέθοδος Βρόχων με εξαρτημένες πηγές

Ίδια μεθοδολογία με τις κανονικές πηγές με τον ακόλουθο επιπλέον κανόνα :

Για κάθε σχέση εξάρτησης, βρίσκουμε μια πρόσθετη εξίσωση που περιγράφει την εξάρτηση.

Παράδειγμα (με εξαρτημένη πηγή ρεύματος)

- Να υπολογιστεί το ρεύμα I



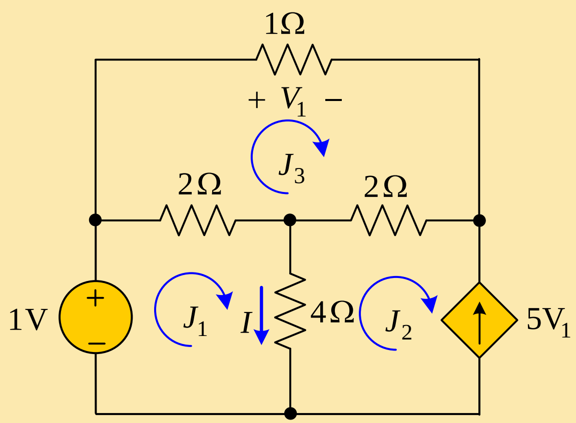
$$J_2 = -5V_1$$

$$-2J_1 - 2J_2 + 5J_3 = 0$$

$$6J_1 - 4J_2 - 2J_3 = 1$$

Πρόσθετη εξ. λόγω της εξαρτημένης πηγής:

$$V_1 = J_3 \Rightarrow J_2 = -5J_3$$

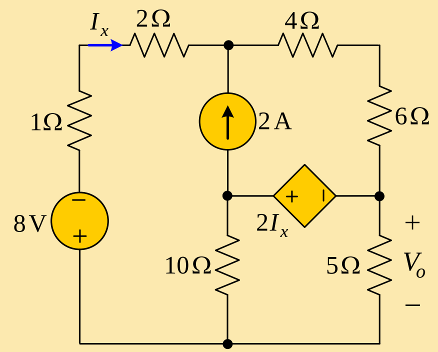


Αντικαθιστούμε λοιπόν το J_2 και το σύστημα γίνεται

$$\left.\begin{array}{r} 6J_1 + 18J_3 = 1 \\ -2J_1 + 15J_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} J_1 = \frac{5}{42}\,\mathrm{A} \\ J_3 = \frac{1}{63}\,\mathrm{A} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow J_2 = -5J_3 = -\frac{5}{63}\,\mathrm{A} \quad \Rightarrow I = J_1 - J_2 = \frac{5}{42} + \frac{5}{63} = 0.198\,\mathrm{A}$$

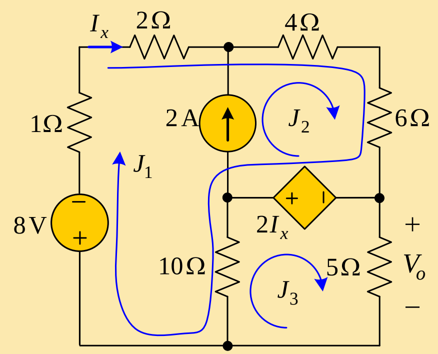
Παράδειγμα 3.21 Με τη μέθοδο του υπερβρόχου βρείτε την τάση V_o .



Σχήμα 3.38

Λύση

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πηγή ρεύματος που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο βρόχων. Διαλέγουμε λοιπόν κατάλληλα τον υπερβρόχο και τους λοιπούς βρόχους όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.39

Προφανώς $J_2 = 2\text{A}$ ενώ οι δύο εξισώσεις βρόχων έχουν τη μορφή:

Εξ. υπερβρόχου: $23J_1 + 10J_2 - 10J_3 = 2I_x - 8 \xRightarrow{I_x = J_1} 21J_1 - 10J_3 = -28$

Εξ. 3ου βρόχου: $-10J_1 + 15J_3 = -2I_x \xRightarrow{I_x = J_1} -8J_1 + 15J_3 = 0$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε

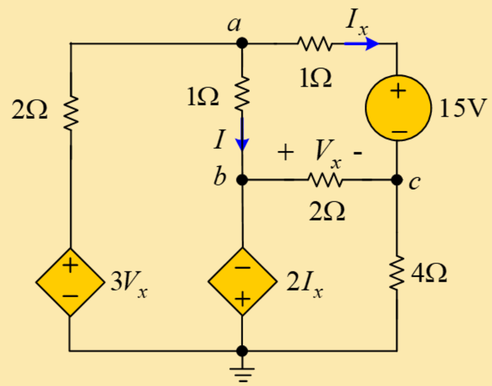
$$J_1 = -\frac{84}{47}\text{A} \quad \text{και} \quad J_3 = -\frac{224}{235}\text{ A}$$

Συνεπώς

$$V_o = 5J_3 = -4.766\text{ V}$$

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί τα ρεύμα I.



Σχήμα 1

Λύση

Ας λύσουμε το κύκλωμα τόσο με τη μέθοδο των κόμβων όσο και των βρόχων.

<u>Μέθοδος των βρόχων</u>

Από το Σχ. 2 έχουμε τις εξισώσεις

$3I_1 - I_2 = 2I_x + 3V_x$ (1)

$-I_1 + 4I_2 - 2I_3 = -15$ (2)

$-2I_2 + 6I_3 = -2I_x$ (3)

Επίσης

$I_2 = I_x$ (4)

$V_x = 2(I_3 - I_2)$ (5)

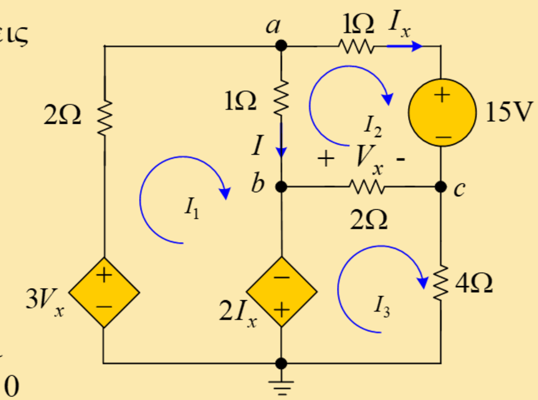
Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$-2I_x + 6I_3 = -2I_x \Rightarrow I_3 = 0$$

Συνεπώς, οι (1) και (2) δίνουν

$$3I_1 - 3I_2 = 3(-2I_2) \Rightarrow I_1 = -I_2 \quad (6)$$

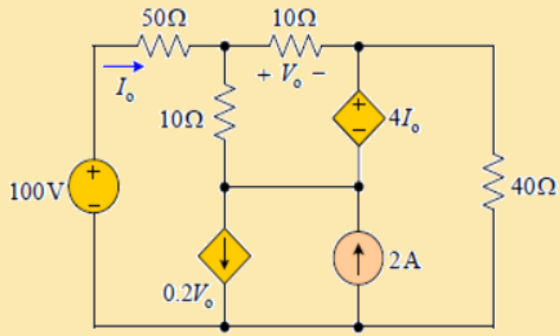
$$-I_1 - 4I_1 = -15 \Rightarrow I_1 = 3\,\text{A} \quad (7)$$



Σχήμα 2

Άσκηση 3.26

Στο κύκλωμα του Σχ. 1 να υπολογιστούν τα V_o και I_o.

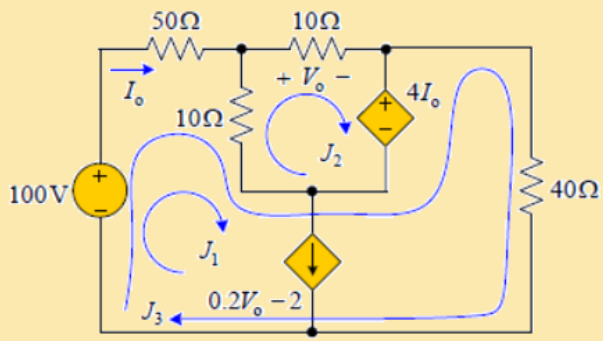


Σχήμα 1

Λύση

Οι δύο πηγές ρεύματος είναι παράλληλα συνδεδεμένες, οπότε μπορούν να αθροιστούν. Στο Σχήμα 2 καθορίζονται κατάλληλοι τρεις βρόχοι απ' όπου προκύπτει ότι

$$J_1 = 0.2V_o - 2 \quad (1)$$



Σχήμα 2

Οι εξισώσεις στους άλλους δύο βρόχους έχουν τη μορφή

$$-10J_1 + 20J_2 - 10J_3 = -4I_o \quad (2)$$

$$60J_1 - 10J_2 + 100J_3 = 100 + 4I_o \quad (3)$$

Επίσης

$$V_o = 10J_2 \quad (4)$$

και

$$I_o = J_1 + J_3 = 0.2V_o - 2 + J_3 \quad (5)$$

$$\Rightarrow I_o = 2J_2 + J_3 - 2 \quad (6)$$

Από τις (1) και (4) προκύπτει ότι

$$J_1 = 2J_2 - 2 \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τα I_o και I_1 στις εξισώσεις (2) και (3):

$$-20J_2 + 20 + 20J_2 - 10J_3 = -8J_2 - 4J_3 + 8 \quad (8)$$

$$120J_2 - 120 - 10J_2 + 100J_3 = 100 + 8J_2 + 4J_3 - 8 \quad (9)$$

ή

$$-8J_2 + 6J_3 = 12 \quad (10)$$

$$102J_2 + 96J_3 = 212 \quad (11)$$

Η Λύση του ανωτέρω συστήματος είναι

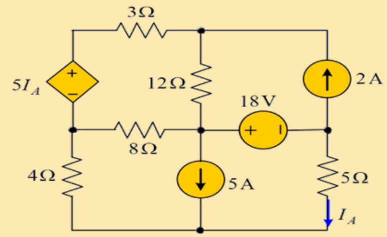
$$J_2 = 0.087\,\text{A} \ \text{και} \ J_3 = 2.116\,\text{A} \quad (12)$$

Συνεπώς

$$V_o = 10J_2 = 0.87\,\text{V} \quad (13)$$

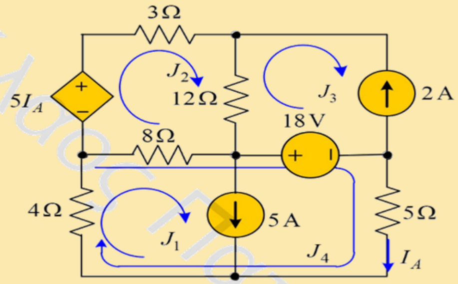
$$I_o = 2J_2 + J_3 - 2 = 0.29\,\text{A} \quad (14)$$

ΘΕΜΑ 3 (3.0 μονάδες) Βρείτε το I_A. Πόση είναι η ισχύς στην εξαρτημένη πηγή τάσης; (μ. 1.5)



Λύση

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των βρόχων επιλέγοντας κατάλληλά τα ρεύματα βρόχων όπως δείχνεται στο Σχ. 2.



Σήμα 2

Προφανείς εξισώσεις

$$J_1 = 5\text{A}\ \text{και}\ J_3 = -2\ \text{A}$$

Οι εξισώσεις στους άλλους δύο βρόχους έχουν τη μορφή

$$23J_2 - 12(-2) - 8 \times 5 - 8J_4 = 5J_4 \Rightarrow 23J_2 - 13J_4 = 16$$

$$17J_4 + 12 \times 5 - 8J_2 = -18 \Rightarrow 8J_2 - 17J_4 = 78$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε

$$J_2 = -2.585\text{A} \quad \text{και} \quad J_4 = -5.805\text{A}$$

Συνεπώς, η εξαρτημένη πηγή τάσης έχει τάση

$$5I_A = 5J_4 = -21.01V$$

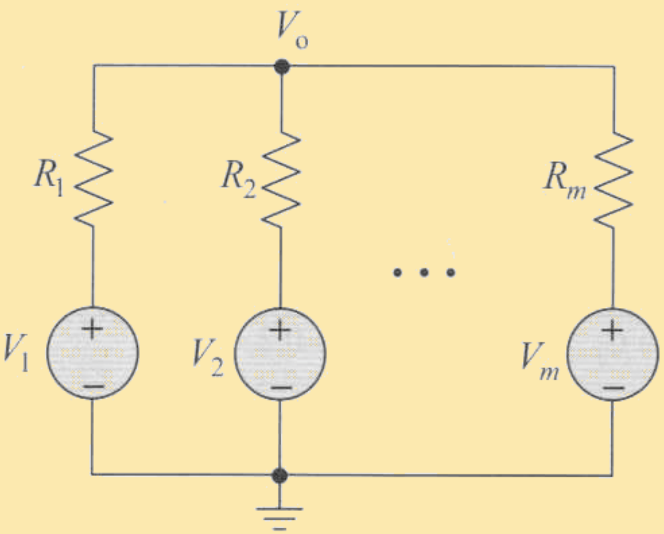
Άρα, η ισχύς στην εξ. πηγή είναι ίση με

$$P = -J_2 5J_4 = -75.03\text{W}$$

Νικόλαος Παπαμάρκος

Θεώρημα Millman

Θεώρημα Millman: Υπολογισμός τάσης σε κύκλωμα με παράλληλους κλάδους.



$$V_0 = \frac{V_1G_1 + V_2G_2 + ... + V_mG_m}{G_1 + G_2 + ... + G_m}$$

Απόδειξη:

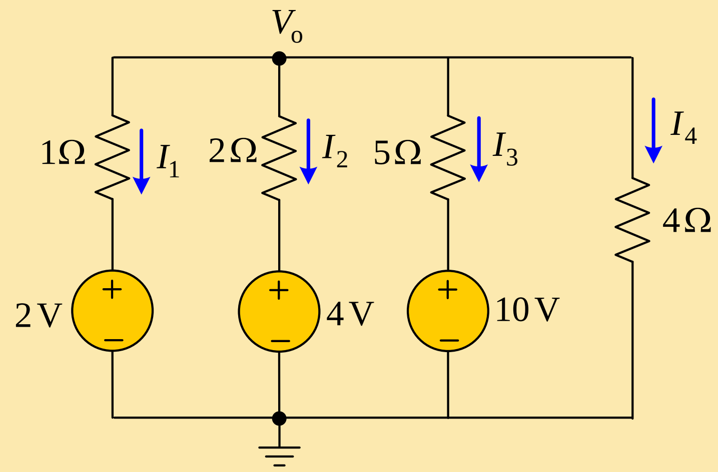
Χρησιμοποιώντας το NPK στον κόμβο V_o.

$$\frac{V_o - V_1}{R_1} + \frac{V_o - V_2}{R_2} + ... + \frac{V_o - V_m}{R_m} = 0$$

$$V_o\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_m}\right) = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + ... + \frac{V_m}{R_m}$$

$$\Rightarrow V_o = \frac{V_1G_1 + V_2G_2 + ... + V_mG_m}{G_1 + G_2 + ... + G_m}$$

Παράδειγμα 3.21 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.41 να υπολογιστούν τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 και I_4 .



Σχήμα 3.41

Λύση

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Millman βρίσκουμε ότι

$$V_o = \frac{V_1G_1 + V_2G_2 + V_3G_3 + 0 \times G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{2 \times 1 + 4 \times 0.5 + 10 \times 0.2}{1 + 0.5 + 0.2 + 0.25} = 3.077\text{V}$$

Τώρα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τα τρία ρεύματα:

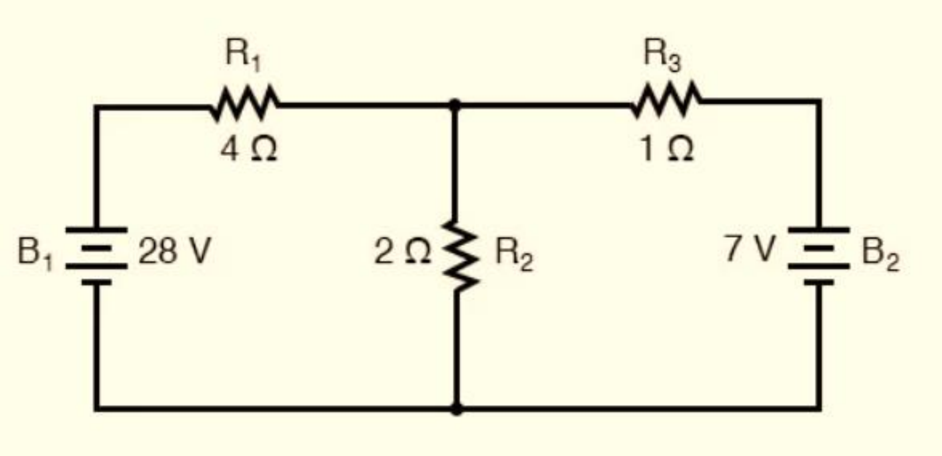
$$I_1 = \frac{V_o - 2}{1} = 1.077\,\text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_o - 4}{2} = -0.462\text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_o - 10}{5} = -1.385\,\text{A}$$

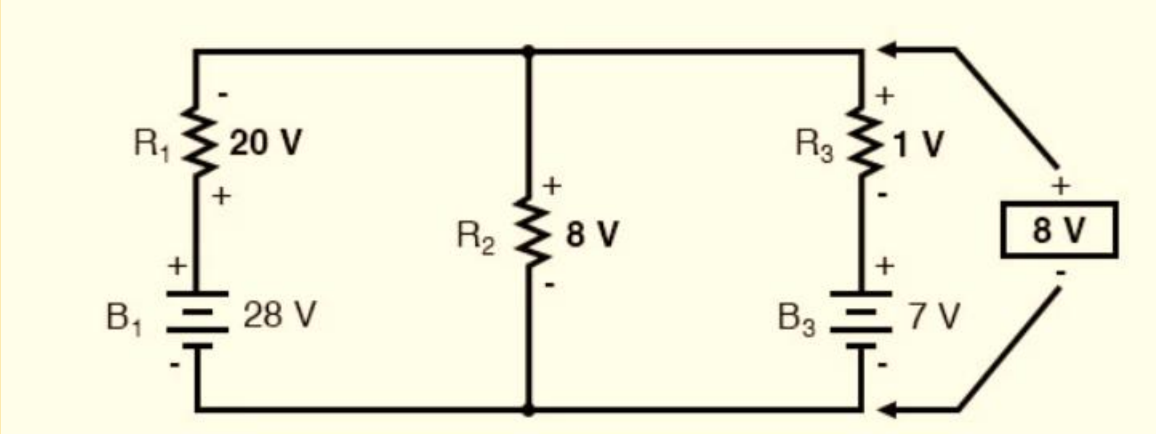
$$I_4 = \frac{V_o}{4} = 0.769\text{A}$$

Θεώρημα Millman - Παράδειγμα



Να βρεθεί η τάση πάνω στην R_2

$$\frac{\frac{28\ V}{4\ \Omega} + \frac{0\ V}{2\ \Omega} + \frac{7\ V}{1\ \Omega}}{\frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{1\ \Omega}} = 8\ V$$



Επιλογή Μεθόδου Ανάλυσης

1. Επιλέγουμε τη μέθοδο που περιγράφει το κύκλωμα με το λιγότερο αριθμό εξισώσεων:

Μέθοδος Κόμβων απαιτεί **n-1** εξισώσεις.

Μέθοδος Βρόχων απαιτεί b-n+1 εξισώσεις.

2. Επιλέγουμε τη μέθοδο ανάλογα με την τοπολογία του κυκλώματος (παρουσία πηγών τάσης, πηγών ρεύματος κ.α.)