Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα Ηλεκτρικά Κυκλώματα

του Νικολάου Παπαμάρκου

Με βάση το βιβλίο Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Τόμος ΑΒ

Βιβλία


ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ
Τόμος ΑΒ
Νικόλαος Παπαμάρκος


ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ
Τόμος ΑΒ
Νικόλαος Παπαμάρκος

Τι είναι τα Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Ηλεκτρικά Κυκλώματα;

Το **Ηλεκτρικό Κύκλωμα** είναι προσομοίωση Φυσικού Συστήματος που:

- μεταδίδει πληροφορίες
- επεξεργάζεται πληροφορίες
- κάνει μετρήσεις
- μεταφέρει ενέργεια

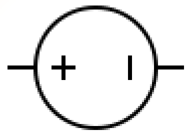
Τα **Ηλεκτρικά Κυκλώματα** είναι συνήθως τμήματα μεγαλύτερων συστημάτων, όπως:

- παλμογράφοι
- βολτόμετρα
- υπολογιστές
- φορητές συσκευές, mp3 players, iphone κ.α.

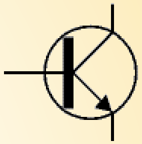
Τι είναι τα Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Ηλεκτρικά Κυκλώματα;

Τα Ηλεκτρικά Κυκλώματα αποτελούνται από απλά στοιχεία, όπως:

- Πηγές

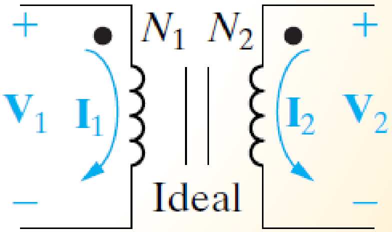


- Τρανζίστορς



- Αντιστάσεις

- Μετασχηματιστές



- Πυκνωτές

- Πηνία

Τί είναι η Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων ;

Η **Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων** ασχολείται με την ανάλυση, μέτρηση και μελέτη των μεγεθών που διέπουν τα Ηλεκτρικά Κυκλώματα:

Αυτά γίνονται συνήθως με τρεις τρόπους:

- Εργαστηριακά με χρήση οργάνων μέτρησης
- Στο «χαρτί» με χρήση μαθηματικών μοντέλων για κάθε στοιχείο
- Προσομοίωση με χρήση Η/Υ με μοντέλα αριθμητικής ανάλυσης για κάθε στοιχείο

Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Η Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων γίνεται ως εξής:

Για την Ανάλυση Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων χρειαζόμαστε :

- Μοντέλα των δομικών στοιχείων των κυκλωμάτων
- Νόμους που διέπουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα

Νόμοι Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Οι νόμοι που διέπουν τα Ηλεκτρικά Κυκλώματα είναι οι εξής:

- Νόμοι Ηλεκτρομαγνητισμού (νόμοι Maxwell)
- Νόμοι Kirchhoff (νόμοι ΗΚ)

Οι νόμοι των ΗΚ (Kirchhoff) είναι ειδικές περιπτώσεις των νόμων του Ηλεκτρομαγνητισμού.

Η Ανάλυση Συστημάτων επίσης είναι μια γενίκευση της Ανάλυσης Κυκλωμάτων.

Συμβολισμοί-Μονάδες

Οι Επιστήμονες χρειάστηκε να θεσπίσουν ενιαίο κώδικα επικοινωνίας για την ανταλλαγή ιδεών – απόψεων.

Πιο συγκεκριμένα, ορίσαν:

- Κοινό συμβολισμό των φαινομένων που μετρούν και μελετούν
- Κοινές μονάδες μετρήσεων των φαινομένων αυτών

Το 1966, η **Διεθνής Ένωση Ηλεκτρολόγων Μηχανικών** (**IEEE**) όρισε το International System of Units (SI).

Συμβολισμοί-Μονάδες

Το International System of Units (SI) έχει τις ακόλουθες μονάδες.

Βασικές Μονάδες SI			
	Σύμβολο Μονάδας	Μέγεθος	Σύμβολο
metre	m	Μήκος	l
kilogram	kg	Μάζα	m
second	sec	Χρόνος	t
ampere	A	Ηλεκτρικό ρεύμα	I
kelvin	K	Θερμοκρασία	T
candela	cd	Ένταση Φωτεινότητας	I_v
mole	mol	Ποσότητα ουσίας	n

Συμβολισμοί-Μονάδες

Πίνακας 1.2. Συμβολισμοί και μονάδες μέτρησης

Μέγεθος	Συμβολισμός	Μονάδες
Δύναμη	F ή f	newton $(N) = Kg\ m/s^2$
Φορτίο	Q ή q	coulombs (Cb ή C)
Ενέργεια	W ή w	joules $(J) = Nm$
Ισχύς	P ή p	watts $(W) = J/s$
Ρεύμα	I ή i	amperes $(A) = Cb/s$
Τάση	V ή v	volts $(V) = J/Cb$
Ηλεκτρικό πεδίο	E	volts/meter (V/m)
Πεπλεγμένη μαγνητική ροή	Ψ	webers $(Wb) = Vs$
Πυκνότητα μαγνητικής ροής	B	teslas $(T) = Wb/m^2$
Συχνότητα	f	hertz $(Hz) = κύκλοι\ /s$
Κυκλική συχνότητα	ω	radians $= 2\pi f$
Θερμοκρασία	T	Kelvin (^oK)
Χρόνος	t	second (sec ή s)
Αντίσταση	R	ohm $(\Omega) = volts/ampere$
Αγωγιμότητα	G ή Y	siemens (S) ή mho = ampere/volt
Αυτεπαγωγή	L	henry (H) = weber/m
Χωρητικότητα	C	farad (F) = Coulomb/volt

Συμβολισμοί-Μονάδες

Το SI καθορίζει σύμβολα που όταν προστίθενται στις μονάδες φυσικών μεγεθών καθορίζουν πολλαπλάσιες ή υποπολλαπλάσιες δυνάμεις του 10.

Πολλαπλάσια	Όνομα		deca-	hecto-	kilo-	mega-	giga-	tera-	peta-	exa-	zetta-	yotta-
	Σύμβολο		da	h	K	M	G	T	P	E	Z	Y
	Παράγων	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Υποπολλαπλάσια	Όνομα		deci-	centi-	milli-	micro-	nano-	pico-	femto-	atto-	zepto-	yocto-
	Σύμβολο		d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y
	Παράγων	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

Συμβολισμοί-Μονάδες

- Υπάρχουν και χώρες με τεχνική παράδοση, που χρησιμοποιούν κι άλλες μονάδες μέτρησης.

  Το Ηνωμένο Βασίλειο χρησιμοποιεί την ίντσα (inch) αντί για το cm.

- Κάποιες επιστήμες επίσης χρησιμοποιούν το angstrom (Å), όπου

$$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \text{m}$$

Ηλεκτρικά Μεγέθη

Ας καθορίσουμε κάποια **βασικά φυσικά μεγέθη** που χρησιμοποιούνται στην Ανάλυση ΗΚ:

- Φορτίο και Ρεύμα
- Τάση
- Ενέργεια
- Ισχύς

Φορτίο

Πυρήνας ατόμου $\begin{cases} \text{Θετικά φορτισμένα σωματίδιου (πρωτόνια)} \\ \text{Αρνητικά φορτισμένα σωματίδιου (ηλεκτρόνια)} \end{cases}$

Ουδέτερο άτομο => φορτίο πρωτονίων = φορτίο ηλεκτρονίων

Αρ. Πρωτονίων > Αρ. Ηλεκτρονίων => Θετικά φορτισμένο άτομο
Αρ. Πρωτονίων < Αρ. Ηλεκτρονίων => Αρνητικά φορτισμένο άτομο

Μονάδα Ηλεκτρικού φορτίου = φορτίο 1 ηλεκτρονίου Πολύ μικρό

Μονάδα Ηλεκτρικού φορτίου

1 coulomb $= 6.24 \times 10^{8}$ ηλεκτρόνια

Φορτίο και Ρεύμα

Φορτίο: Από πεδιακής άποψης

1 Coulomb = Δύναμη 1 Newton σε ηλεκτρικό πεδίο έντασης 1 Volt/m

= φορτίο που παράγει ρεύμα 1 A σε 1 sec

Ηλεκτρικό ρεύμα = μεταφορά φορτίου από ενα σημείο σε άλλο.

Ένταση Ηλεκτρικού Ρεύματος = μεταβολή φορτίου που διέρχεται από μια επιφάνεια στη μονάδα χρόνου=ρυθμός μεταβολής φορτίου

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \qquad \text{(Ampere)}$$

Αγωγοί = Υλικά με μεγάλο αριθμό ελευθέρων ηλεκτρονίων (μέταλλα)

Μονωτές = Υλικά με μικρό αριθμό ελευθέρων ηλεκτρονίων (ξύλο, πλαστικό)

Ημιαγωγοί = Υλικά μονωτικά που υπό προϋποθέσεις γίνονται αγωγοί (Si, Ge)

Τάση

Η κίνηση των φορτίων παράγει έργο

Τάση ή Διαφορά Δυναμικού = μεταβολή ενέργειας ανά μονάδα φορτίου

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq}$$

Μετριέται σε Volts

1 Volt = μεταβολή ενέργειας 1 Joule ενός φορτίου 1 Coulomb

Ενέργεια

$$v(t)=\frac{dw(t)}{dq}\Rightarrow dw(t)=v(t)dq(t)$$

Αυτό σημαίνει για μεταφορά φορτίου dq μεταξύ δύο σημείων με διαφορά δυναμικού $v(t)$ απαιτείται ενέργεια dw

$$w(t)=\int_0^{q(t)} v(t)dq(t)$$

Για $t\in(-\infty,t]$ $$w(t)=\int_{-\infty}^{t} v(t)i(t)dt=w(0)+\int_0^{t} v(t)i(t)dt$$

Ισχύς

Στιγμαία Ισχύς = ρυθμός μεταβολής ενέργειας

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \frac{v(t)dq}{dt} = v(t)i(t)$$

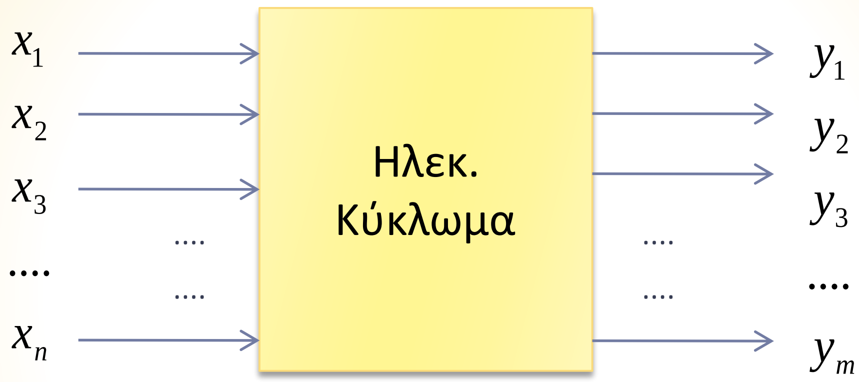
Δηλαδή $\quad p(t) = v(t)i(t)$

Αν $\quad p(t) > 0 \Rightarrow \quad$ κύκλωμα απορροφά ενέργεια

Αν $\quad p(t) < 0 \Rightarrow \quad$ κύκλωμα παράγει ενέργεια

Ιδιότητες Ηλ. Κυκλωμάτων

Έστω ένα Ηλεκτρικό Κύκλωμα:



Θέτουμε

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Γραμμικότητα Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Η συνάρτηση $\underline{y} = f(\underline{x})$ εκφράζει τη σχέση μεταξύ των διεγέρσεων Και των αποκρίσεων του κυκλώματος.

- Αν η $f(\bullet)$ είναι γραμμική, τότε το κύκλωμα θεωρείται γραμμικό.
- Αν η $f(\bullet)$ είναι μη-γραμμική, τότε το κύκλωμα θεωρείται μη-γραμμικό.

Το θεώρημα υπέρθεσης/επαλληλίας εξηγεί τη γραμμικότητα με τον πολλαπλασιασμό-πρόσθεση.

Γραμμικότητα Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

α) Πρόσθεση

Αν είσοδοι $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ αντιστοιχούν σε εξόδους $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$,
τότε η είσοδος $x = \sum_i x_i$ αντιστοιχεί στην έξοδο $y = \sum_i y_i$.

β) Πολλαπλασιασμός

Αν είσοδος x_i αντιστοιχεί σε έξοδο y_i και έστω $k_i \in Z$
τότε η είσοδος $k_i x_i$ αντιστοιχεί στην έξοδο $k_i y_i$.

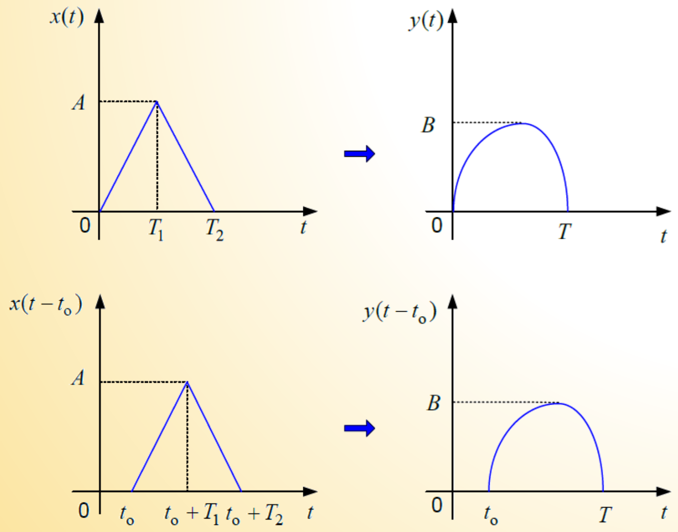
Συνολικά

Αν είσοδοι $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ αντιστοιχούν σε εξόδους $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$, $k_i \in Z$
τότε η είσοδος $x = \sum_i k_i x_i$ αντιστοιχεί στην έξοδο $y = \sum_i k_i y_i$.

Χρονική Αμεταβλητότητα

Ένα ΗΚ είναι χρονικά αμετάβλητο αν είναι ανεξάρτητη του χρόνου η σχέση διέγερσης-απόκρισης.

Αν η είσοδος $x(t)$ αντιστοιχεί στην έξοδο $y(t)$,
τότε η είσοδος $x(t-t_o)$ αντιστοιχεί στην έξοδο $y(t-t_o)$.



Αιτιότητα

Ένα ΗΚ είναι αιτιατό (causal) αν απαιτείται μια διέγερση πάντα για να προκύψει μια απόκριση.

Με μαθηματικούς όρους,

Αν $x(t) = 0, \forall t < t_0$, τότε και $y(t) = 0, \forall t < t_0$

Συγκεντρωμένα Κυκλώματα

Συγκεντρωμένα ≠ Κατανεμημένα Κυκλώματα.

Συγκεντρωμένο Κύκλωμα = η ηλεκτρική του συμπεριφορά καθορίζεται μόνο από τη σχέση μεταξύ τάσης και ρεύματος.

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

Συγκεντρωμένα Κυκλώματα

Η απαίτηση αυτή είναι για να μην έχουμε φαινόμενα διάδοσης.

Οι νόμοι του Kirchhoff προσεγγίζουν τους νόμους του Maxwell.

- Έστω κύκλωμα με μέγιστη συχνότητα f .

Το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{f}$$

Για να λέγεται το κύκλωμα αυτό συγκεντρωμένο πρέπει η διάσταση του d να είναι $d << \lambda$.

Σήματα

Στα ΗΚ παρατηρούμε και αναλύουμε τις τιμές μεγεθών όπως τάση και ρεύμα όπως αλλάζουν στο χρόνο.

Σήματα = Οι μεταβολές αυτές των μεγεθών στο χρόνο.

Σήματα → Αναλογικά
Σήματα → Ψηφιακά
Σήματα → Δυαδικά

Στην Ανάλυση ΗΚ **μόνο** αναλογικά σήματα.

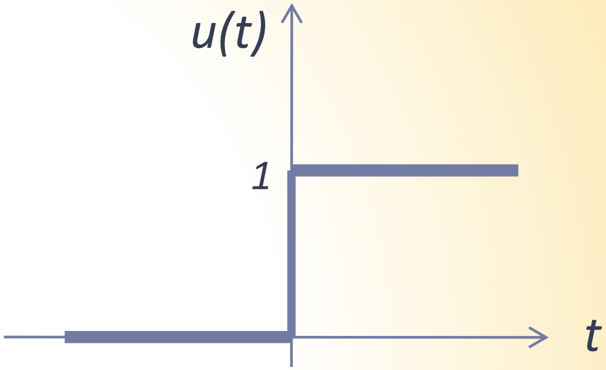
Κυματομορφή = η συνάρτηση $f(t)$, ορισμένη στο διάστημα $[\ t_1, t_2\ ]$ και περιγράφει το σήμα f.

Αναλογικά σήματα → Μη-περιοδικά
Αναλογικά σήματα → Περιοδικά

Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση u(t)

Ορίζεται ως:

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\\ \Diamond, & t=0 \text{ (δεν ορίζεται)}\end{cases}$$



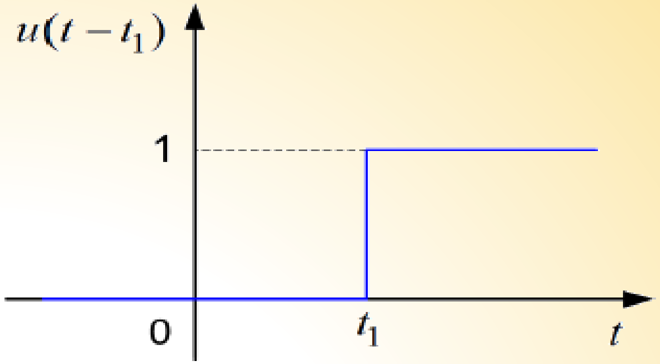
Μετατόπιση

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\ 0, & t<t_0\\ \Diamond, & t=t_0 \text{(δεν ορίζεται)}\end{cases}$$

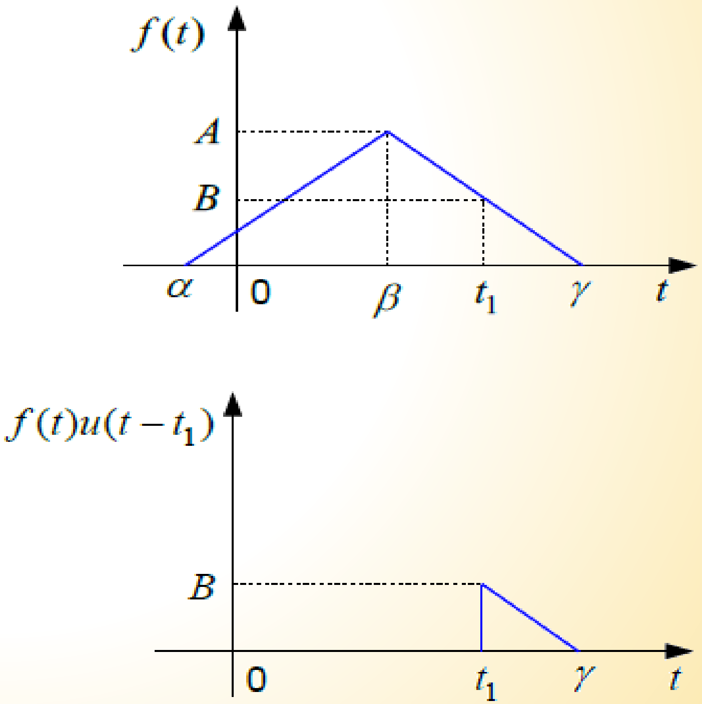
$$f(t)u(t-t_0)=\begin{cases}f(t), & t>t_0\\ 0, & t<t_0\\ \Diamond, & t=t_0\end{cases}$$

(δεν ορίζεται)

Βηματική Συνάρτηση

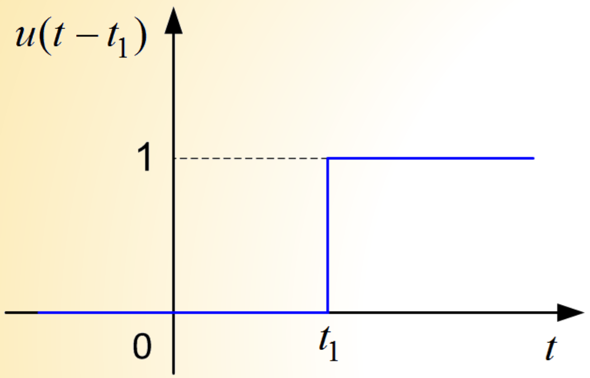


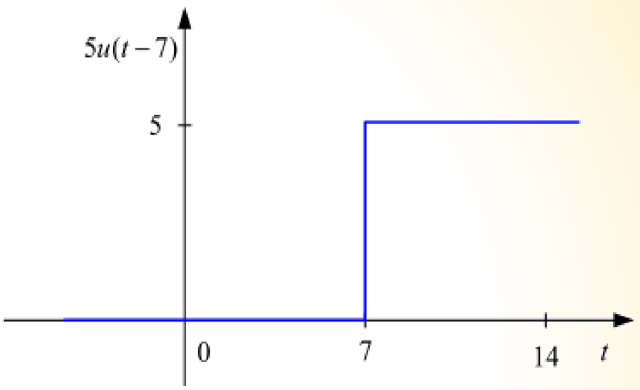
Σχήμα 1.8 Απεικόνιση της $u(t-t_1)$.

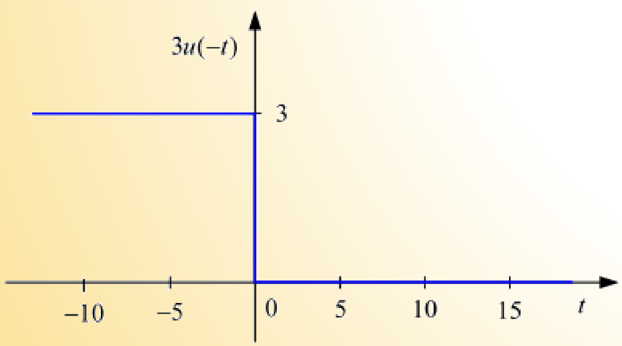


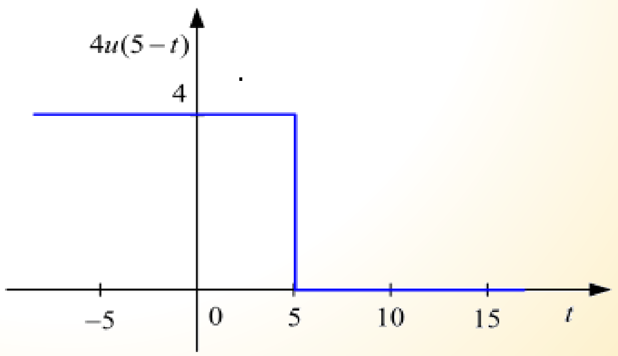
Σχήμα 1.9 Πολλαπλασιασμός της $f(t)$ με $u(t-t_1)$.

Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση u(t)

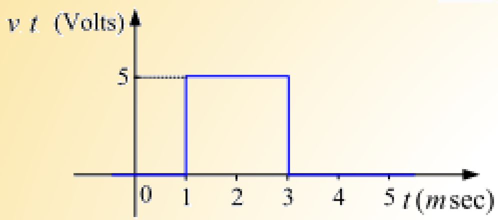


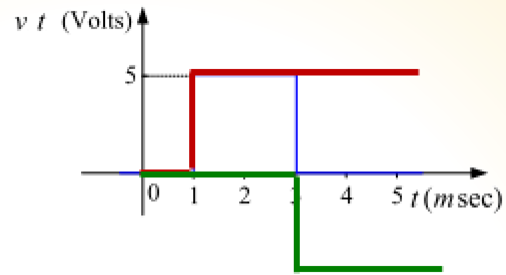




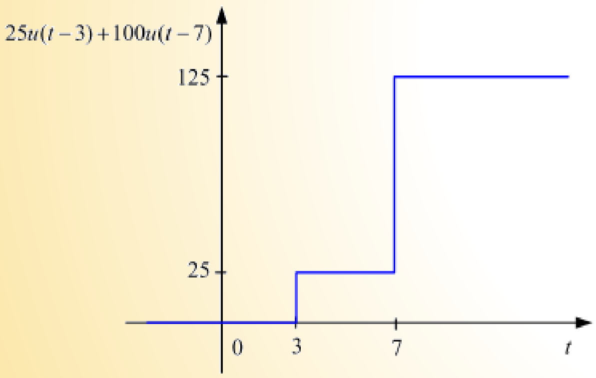


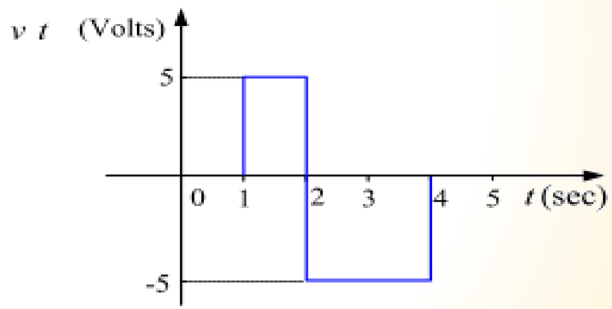
Έκφραση κυματομορφών με την u(t)





$$v(t) = 5u(t-1) - 5u(t-3)$$





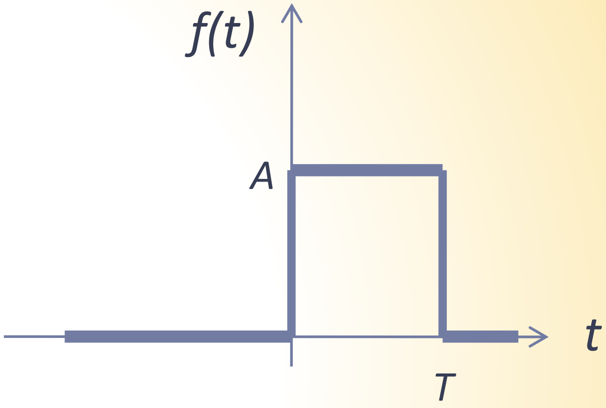
Το σήμα μπορούμε να το προσδιορίσουμε ως το αλγεβρικό άθροισμα δύο παλμών

$$\begin{aligned} v(t) &= 5\left[u(t-1) - u(t-2)\right] - 5\left[u(t-2) - u(t-4)\right] \\ &= 5\left[u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-4)\right] \end{aligned}$$

Ορθογώνιος Παλμός

Ορίζεται ως:

$$f(t) = A[u(t) - u(t-T)]$$



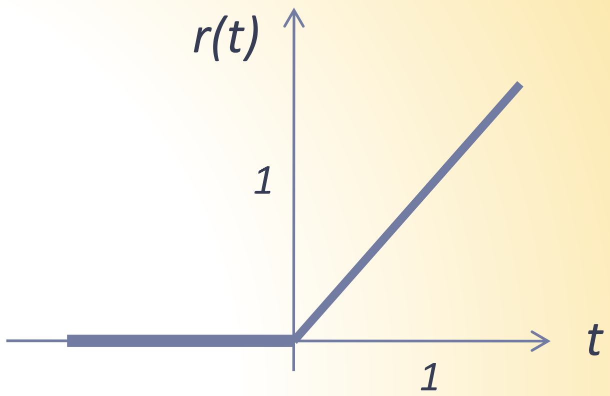
Γενίκευση

$$p(t)\,f(t) = \begin{cases} Ap(t) & ,t \in (0,T) \\ 0 & ,t < 0, t > T \\ \Diamond & ,t = 0, t = T \end{cases}$$ (δεν ορίζεται)

Μοναδιαία Συνάρτηση Αναρρίχησης (ράμπα)

Ορίζεται ως:

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & ,t > 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$



Επεκτάσεις

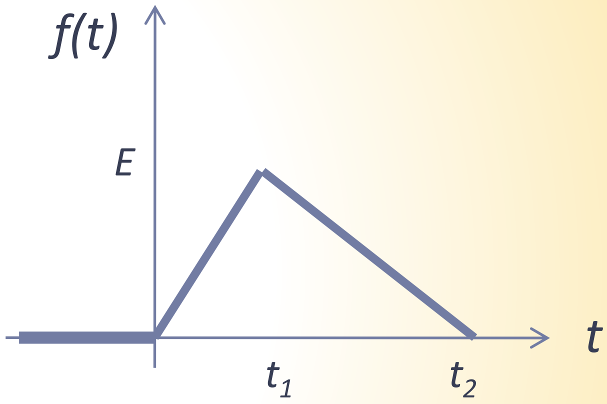
$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

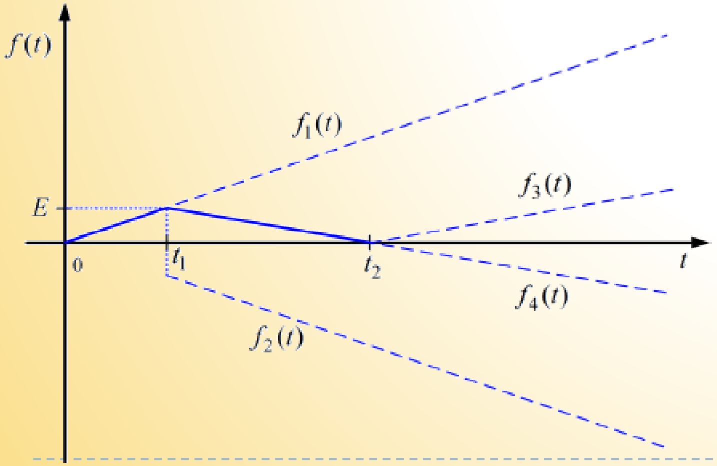
$$u(t) = \frac{dr}{dt}, t > 0$$

Τριγωνικός Παλμός

Ορίζεται ως:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{t_1}t & ,0<t\le t_1\\[2mm] \dfrac{-E}{t_2-t_1}(t-t_2) & ,t_1<t\le t_2\end{cases}$$

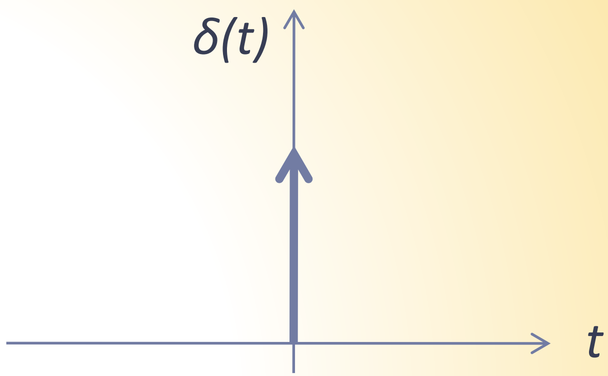




$$f(t)=E\left[\frac{1}{t_1}tu(t)-\frac{1}{t_1}tu(t-t_1)+\frac{t-t_2}{t_1-t_2}u(t-t_1)-\frac{t-t_2}{t_1-t_2}u(t-t_2)\right]$$

Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

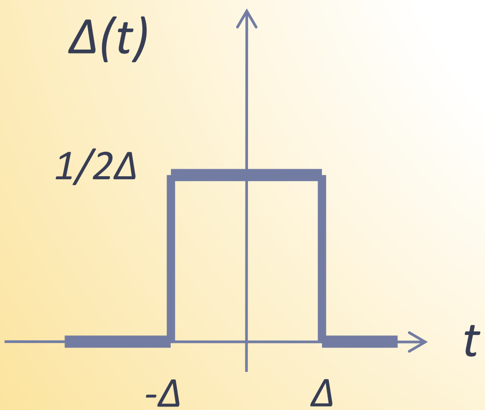
Ορίζεται ως:



$$\delta(t)=\begin{cases}0 & ,t\neq 0\\ \infty & ,t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

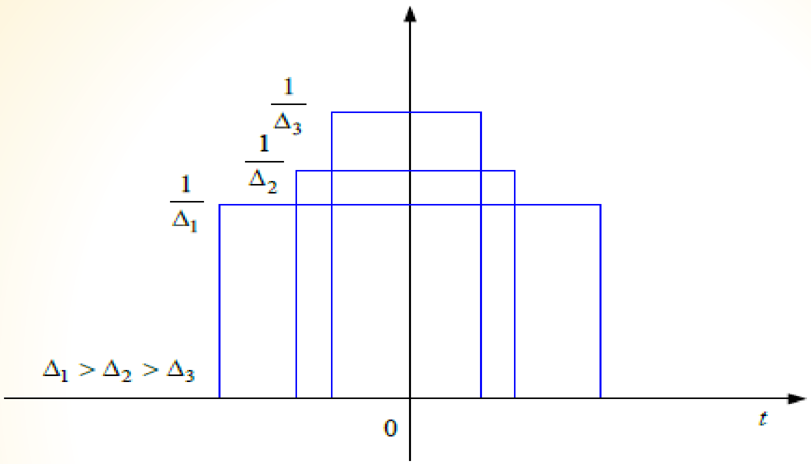
Προσέγγιση της Δέλτα Dirac (Ορθογώνιος Παλμός)



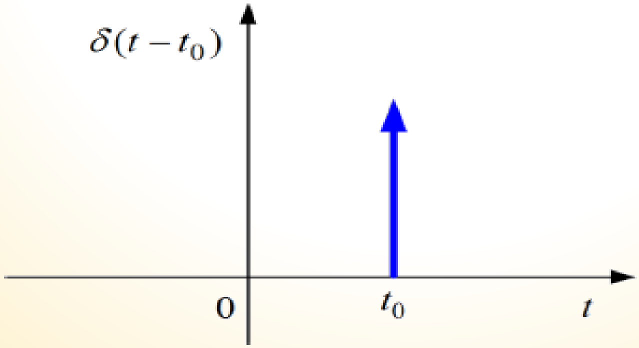
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta(t)dt=\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{1}{2\Delta}dt=1$$

Άρα $\delta(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta(t)$

Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)



Σχήμα 1.17 Μεταβολή της $\Delta(t)$ καθώς $\Delta \to \infty$.



Σχήμα 1.18 Παράσταση της $\delta(t-t_0)$.

Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

Ιδιότητες

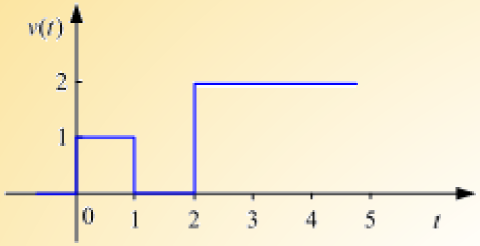
$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t) \Rightarrow \int_{-a}^{b}\delta(t)dt=\begin{cases}1 & a,b>0\\ 0 & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

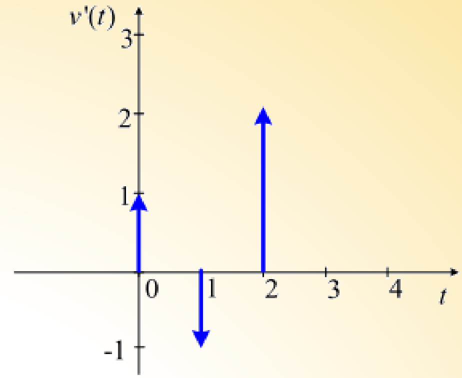
$$f(t)\delta(t-t_o)=f(t_o)\delta(t-t_o)$$

$$\int_{a}^{b}\delta(t-t_0)dt=\begin{cases}1 & t_0\in[a,b]\\ 0 & t_0\notin[a,b]\end{cases}$$

$$\int_{-a}^{b}f(t)\delta(t)dt=\begin{cases}f(0) & a,b>0\\ 0 & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

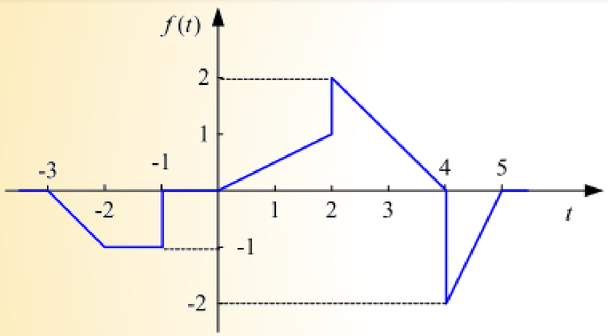
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$$

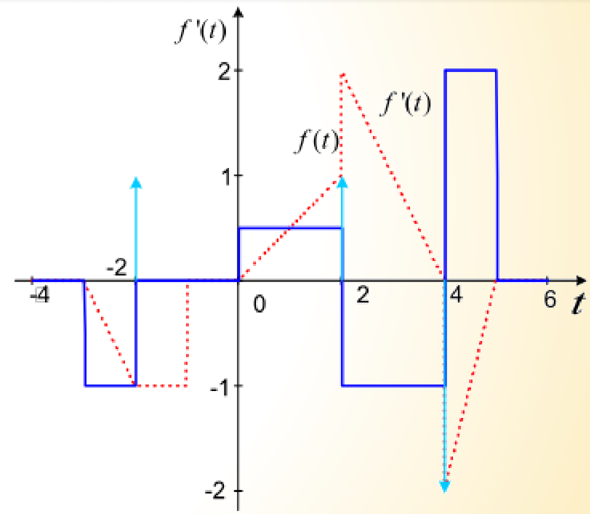




Είναι $v(t)=u(t)-u(t-1)+2u(t-2)$, οπότε

$$v'(t)=\delta(t)-\delta(t-1)+2\delta(t-2)$$





$$f(t)=(-t-3)\left[u(t+3)-u(t+2)\right]-u(t+2)+u(t+1)+0.5t\left[u(t)-u(t-2)\right]$$
$$+(-t+4)\left[u(t-2)-u(t-4)\right]+(2t-10)\left[u(t-4)-u(t-5)\right]$$

ή

$$f(t)=r(t+2)-r(t+3)+u(t+1)+0.5r(t)-0.5r(t-2)-u(t-2)$$
$$+r(t-4)-r(t-2)+2u(t-2)-2r(t-5)+2r(t-4)-2u(t-4)$$

ή

$$f(t)=r(t+2)-r(t+3)+0.5r(t)-1.5r(t-2)-2r(t-5)+3r(t-4)$$
$$+u(t+1)+u(t-2)-2u(t-4)$$

$$f'(t)=-u(t+3)+u(t+2)+\delta(t+2)-\delta(t+2)$$
$$+\delta(t+1)+0.5\left[u(t)-u(t-2)\right]-\delta(t-2)$$
$$-u(t-2)+u(t-4)+2\delta(t-2)$$

Περιοδικά Σήματα (κυματομορφές)

Περιοδικό σήμα με περίοδο T αν ισχύει

$$p(t) = p(t \pm nT), \forall n \in Z^+$$

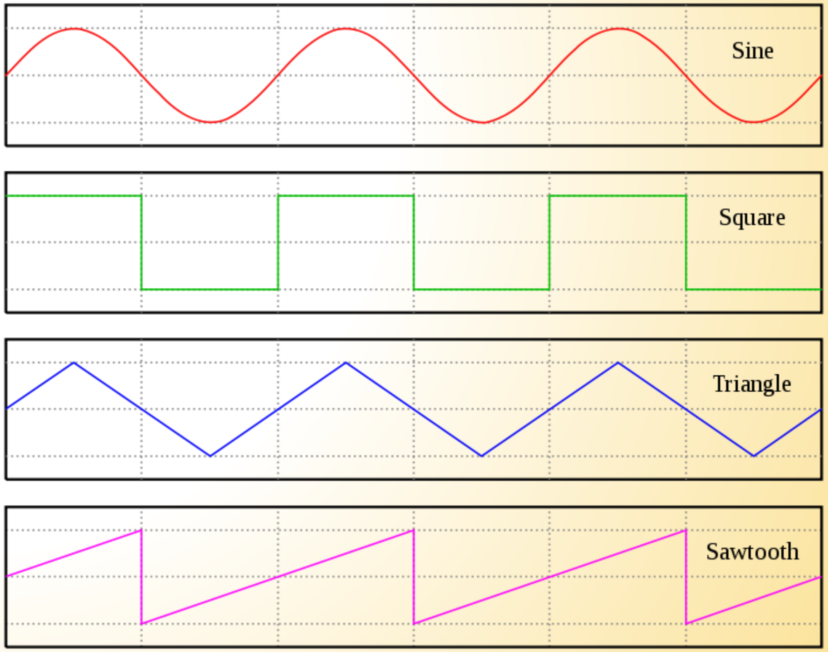
Περίοδος T (sec),

Συχνότητα $f = 1/T$ (Hz)

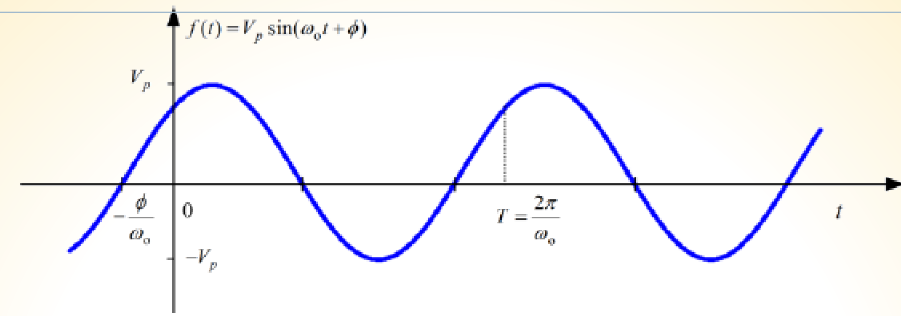
Κύκλος κυματομορφής =

Κυματομορφή από t ως $t+T$.

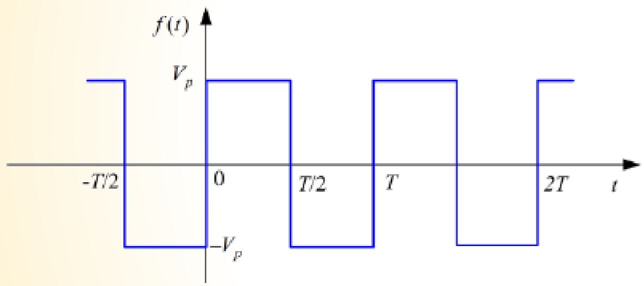
Hz = κύκλοι ανά sec.



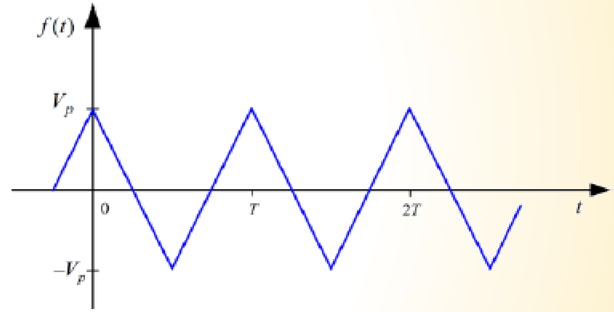
Περιοδικές κυματομορφές



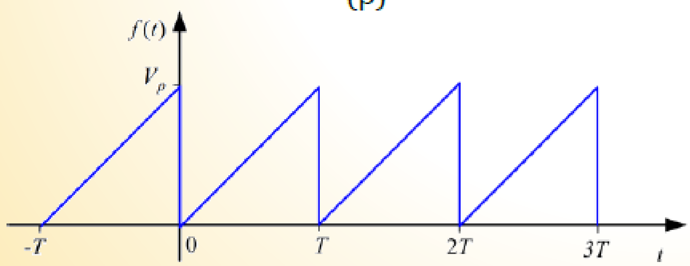
(α)

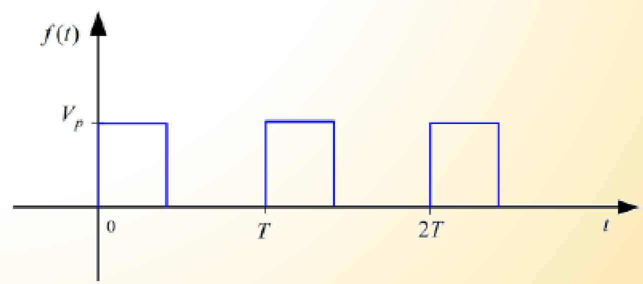


(β)



(γ)

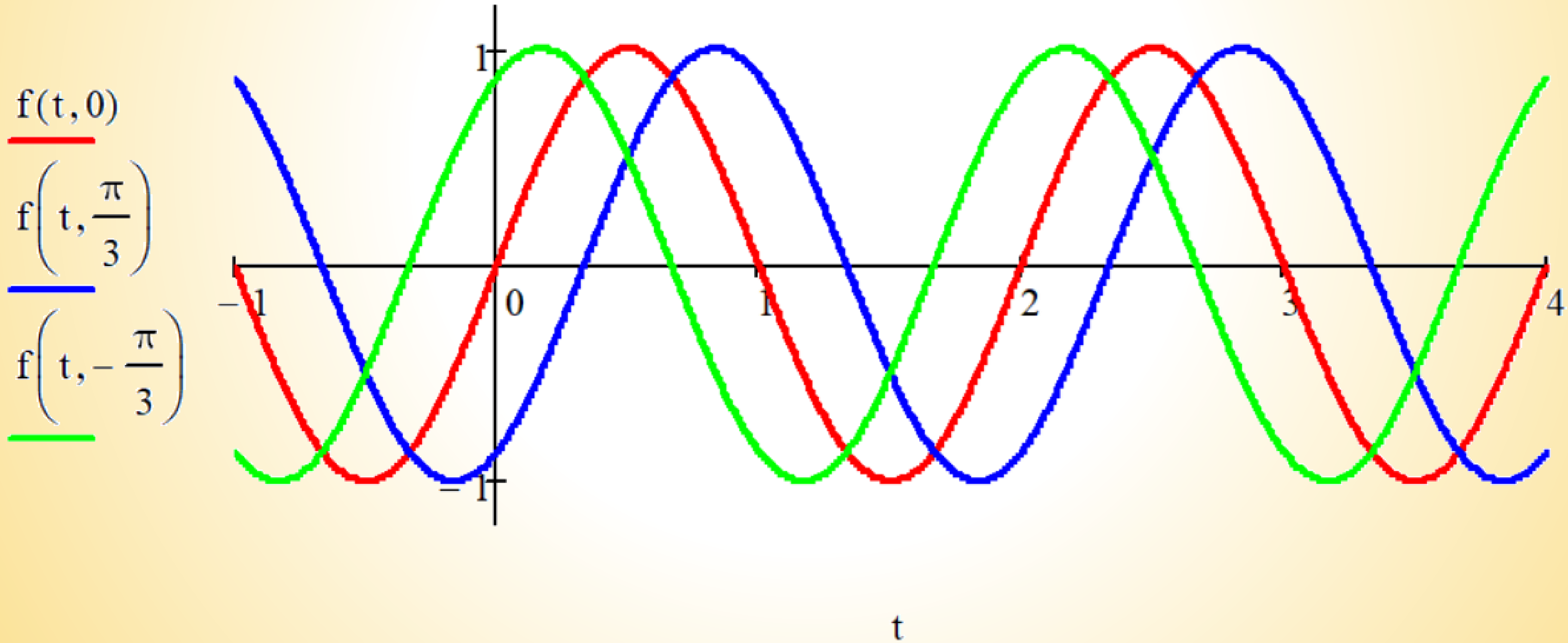




Διαφορά φάσης

$$f(t,to) := \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t - to\right)$$

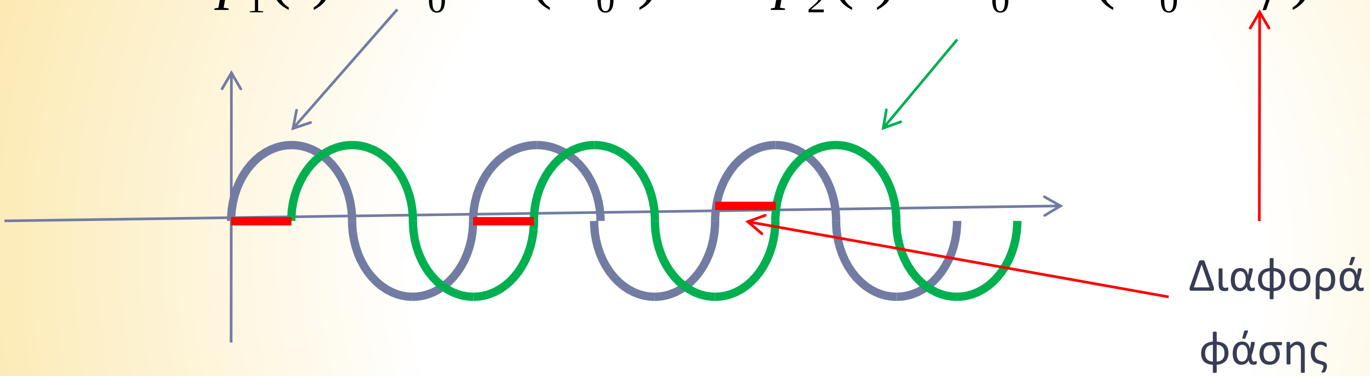
$$t := a, a + 0.0001 .. 2\cdot T$$



Περιοδικά Σήματα – Φάση

Διαφορά Φάσης = Μετατόπιση της θέσης περιοδικών κυματομορφών

Έστω $p_1(t) = V_0 \sin(\omega_0 t)$ $\qquad$ $p_2(t) = V_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$



Γενίκευση Έστω $p_1(t)$ και $p_2(t)= p_1(t-t_0)$

Αν $t_0>0$ η $p_2(t)$ υστερεί σε φάση,

$t_0<0$ η p_2(t) προηγείται σε φάση

$t_0=0$ είναι συμφασικές

Περιοδικά Σήματα – Πλάτος

Ορισμοί

1. Peak-Peak τιμή (pp) p_{pp}=max (*πλάτος κύκλου*)-min (*πλάτος κύκλου*)

2. Μέση τιμή

$$p_{\mu} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} p(t)dt$$

3. Μέση τετραγωνική τιμή

$$p_{2,\mu} = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} p^{2}(t)dt$$

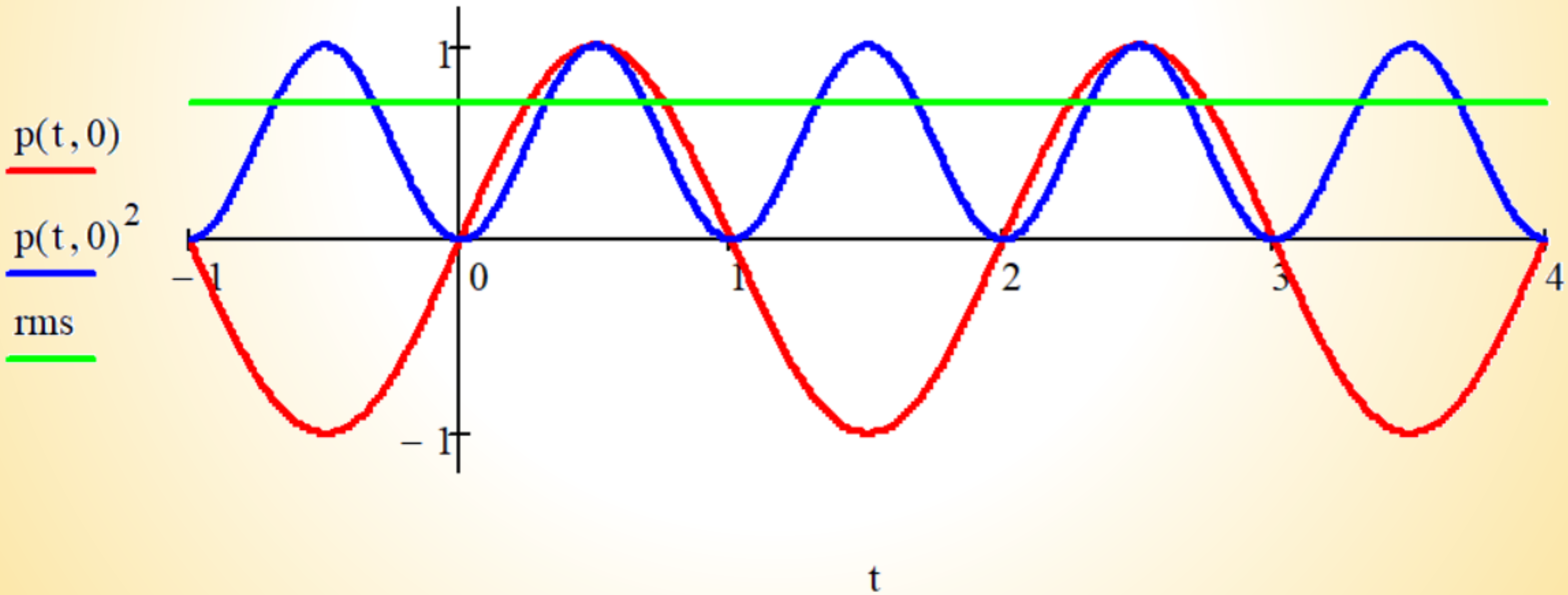
4. RMS τιμή (Root Mean Square)

$$p_{rms} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{0}^{\mathrm{T}} p^{2}(t)dt}$$

Ενεργός τιμή ημιτονοειδούς κυματομορφής

$$\text{mesn\_tetr} := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T p(t,0)^2\,dt = 0.5$$

$$\text{rms} := \sqrt{\text{mesn\_tetr}} = 0.707$$



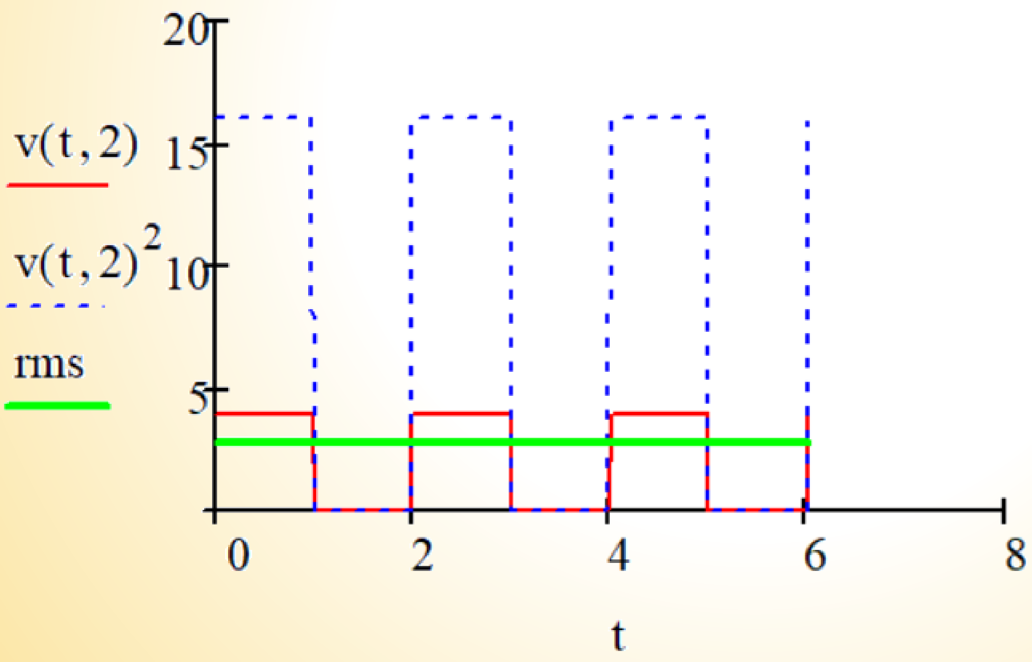
Ενεργός τιμή Τετραγωνικής κυματομορφής

$$mesn := \frac{1}{T}\cdot\int_0^T v(x,T)^2\,dx = 8$$

$$rms := \sqrt{mesn}$$

$$rms = 2.828$$

$$t := 0, 0.01 .. 3\cdot T$$

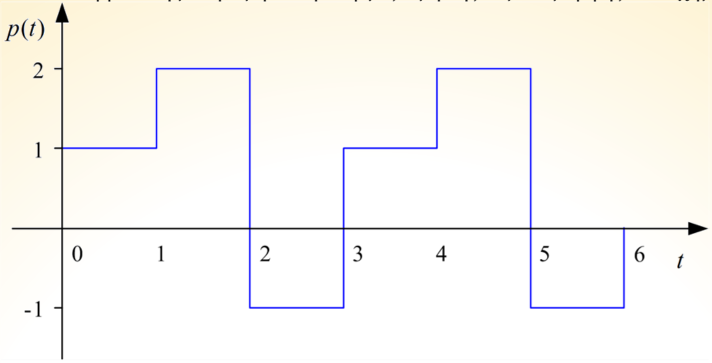


$$T = 2$$

$$m := \frac{\frac{T}{2}\cdot 16}{T} = 8$$

$$\sqrt{m} = 2.828$$

Παράδειγμα 1.1 Να βρεθεί η μέση τιμή και η ενεργός τιμή της κυματομορφής του Σχήματος 1.21.



Σχήμα 1.1

Λύση

Προφανώς η περίοδος της κυματομορφής ισούται με $T = 3$ sec. Για τη μέση τιμή έχουμε

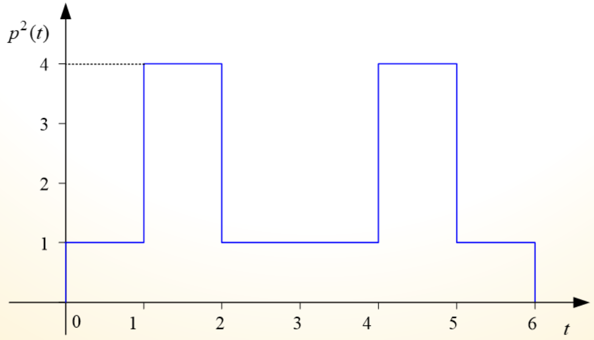
$$P_\mu = \frac{\text{εμβαδόν κύκλου}}{T} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Η $p^2(t)$ έχει τη μορφή που δείχνεται στο Σχήμα 1.22. Η μέση τιμή της $p^2(t)$ ισούται με

$$\left(p^2(t)\right)_\mu = \frac{\text{εμβαδόν κύκλου}}{T} = \frac{1\cdot 3 + 1\cdot 3}{3} = 2$$

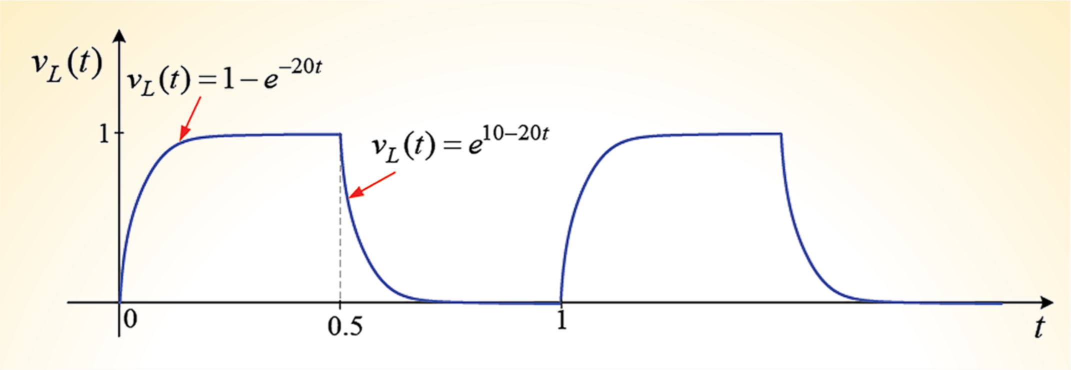
Συνεπώς, η rms τιμή ισούται με

$$P_{rms} = \sqrt{\left(p^2(t)\right)_\mu} = \sqrt{2}$$



Σχήμα 1.2 Μορφή της $p^2(t)$.

Παράδειγμα 1.5 Η τάση σε ένα πηνίο έχει τη μορφή του Σχήματος 1.25. Βρείτε την ενεργό τιμή της $v_L(t)$.



Σχήμα 1.1

Λύση

Η τάση είναι ένα περιοδικό σήμα με $T=1\sec$. Συνεπώς η ενεργός του τιμή προκύπτει από τη σχέση

$$V_{L,rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v_L^2(t)dt}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$V_{L,rms}=\sqrt{\int_0^{0.5}\left[1-e^{-20t}\right]^2 dt+\int_{0.5}^{1} e^{20-40t}dt}$$

$$=\sqrt{\int_0^{0.5}\left[1-2e^{-20t}+e^{-40t}\right]dt+\int_{0.5}^{1} e^{20-40t}dt}$$

$$=\sqrt{t\Big|_0^{0.5}-\frac{2}{-20}e^{-20t}\Big|_0^{0.5}-\frac{1}{40}e^{-40t}\Big|_0^{0.5}+e^{20}\frac{1}{-40}e^{-40t}\Big|_{0.5}^{1}}$$

$$=\sqrt{0.5+\frac{2}{20}e^{-10}-\frac{2}{20}-\frac{1}{40}e^{-20}+\frac{1}{40}+e^{20}\left(\frac{1}{-40}e^{-40}-\frac{1}{-40}e^{-20}\right)}$$

$$\Rightarrow V_{L,rms}=0.670824\text{V}$$