Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

του Νικολάου Παπαμάρκου

Στοιχεία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Για να αναλύσουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα πρέπει:

- να ξέρουμε τα μαθηματικά μοντέλα όλων των ηλεκτρικών στοιχείων
- να ορίσουμε βασικούς νόμους ανάλυσης Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Οι βασικοί νόμοι των Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων είναι:

- Νόμος Ohm
- Νόμοι του Kirchhoff

Νόμος του Ohm

Ο George Simon Ohm το 1827 διαπίστωσε σε μια μελέτη του, ότι:

"*Η τάση στα άκρα πολλών μετάλλων είναι ανάλογη προς το ρεύμα που τα διαρρέει.*"

Μαθηματικά αυτό μεταφράζεται σε:

$$v = Ri, \forall R \geq 0$$

όπου *R* η αντίσταση του μετάλλου και μετριέται σε Ohm (Ω).

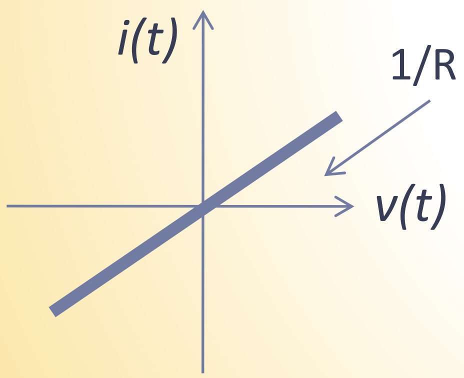
Αντίσταση

Οι αντιστάσεις χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

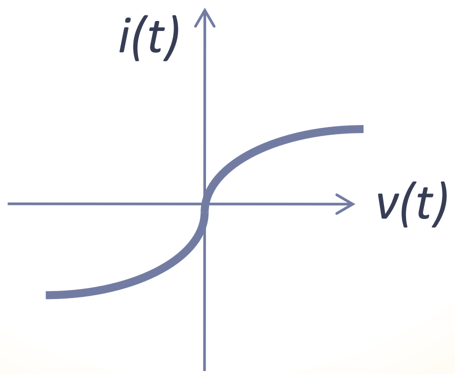
α) Γραμμική – Χρονικά Αμετάβλητη

β) Μη Γραμμική – Χρονικά Αμετάβλητη

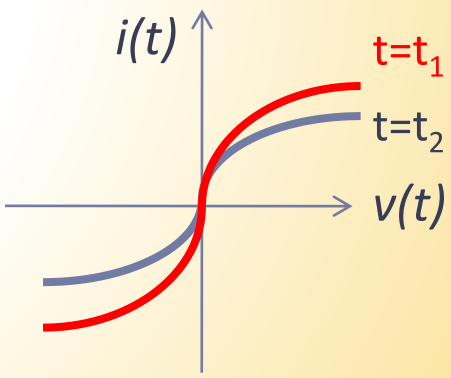
γ) Μη Γραμμική – Χρονικά Μεταβαλλόμενη



(α)



(β)



(γ)

Αντίσταση

Ιδανική αντίσταση = γραμμική – χρονικά αμετάβλητη αντίσταση.

Ισχύει **Νόμος Ohm**: $$v(t) = Ri(t)$$

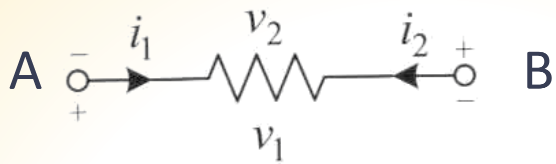
Μπορεί να γραφτεί κι ως: $$i(t) = Gv(t)$$

Ορίζουμε την **αγωγιμότητα** $$G = \frac{1}{R}$$

Μετριέται σε Siemens (S), mho, Ω^{-1}

Αντίσταση

Έστω:



Ισχύει: $v_1 = Ri_1$ $\quad v_2 = Ri_2$ $\quad v_1 = -Ri_2$ $\quad v_2 = -Ri_1$

Αν $R = 0$, τότε τα σημεία του κυκλώματος A, B είναι βραχυκυκλωμένα.

Αν $R \to \infty$, τότε τα σημεία του κυκλώματος A, B είναι ανοιχτοκυκλωμένα.

(διακόπτης)

Η αντίσταση δεν αποθηκεύει ισχύ, μόνο καταναλώνει.

Η στιγμιαία ισχύς δίνεται από τη σχέση:

$$p(t) = v(t)i(t) = v^2(t)G = i^2(t)R > 0$$

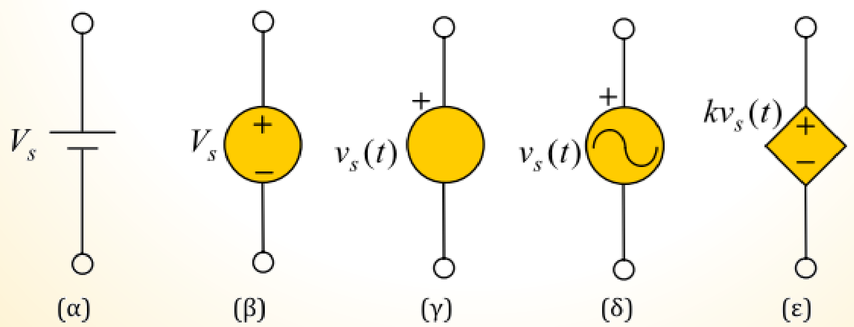
Πάντοτε Θετική, ανεξαρτήτως φορών ρευμάτων/τάσεων.

Πηγές

Πηγές = παρέχουν ενέργεια για τη λειτουργία του κυκλώματος.

Ηλεκτρικές Πηγές → Ανεξάρτητες

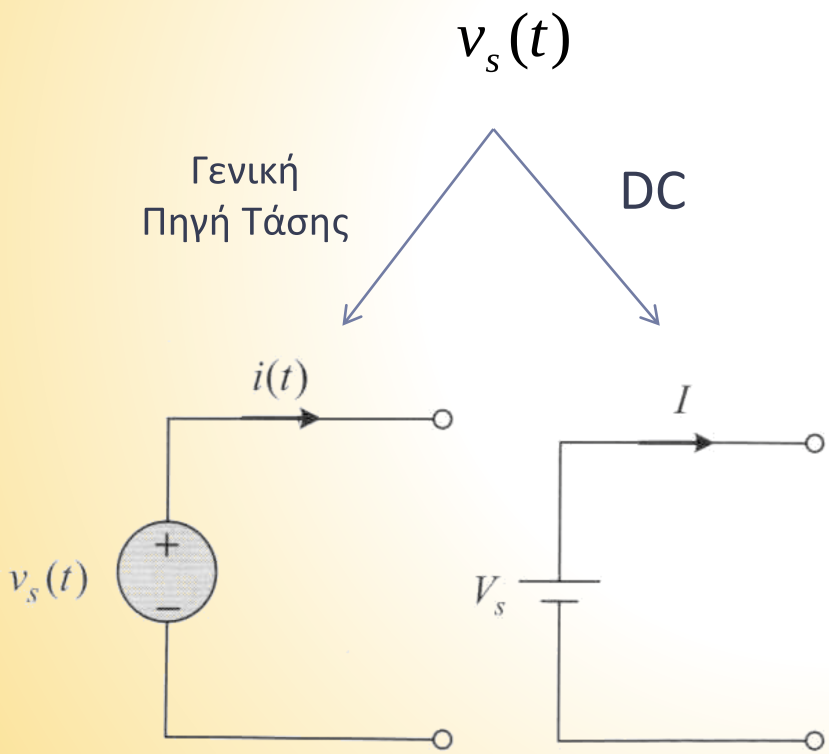
Ηλεκτρικές Πηγές → Εξαρτημένες

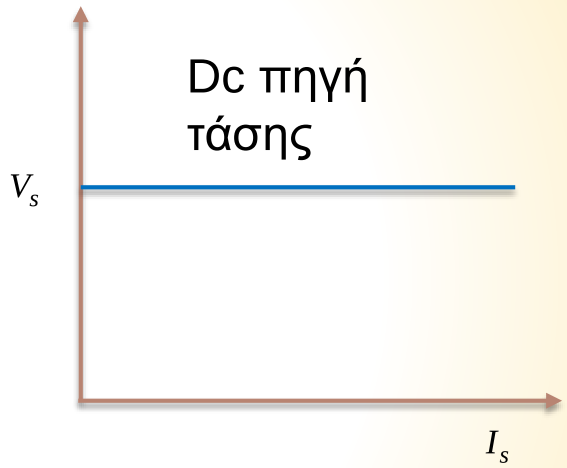


Σχήμα 2.4 (α) και (β) Πηγές συνεχούς τάσης. (γ) Γενικός συμβολισμός μιας πηγής τάσης. (δ) Πηγή εναλλασσόμενης τάσης. (ε) Εξαρτημένη πηγή τάσης.

Ιδανική Πηγή Τάσης

Ιδανική Πηγή Τάσης = Στοιχείο στο οποίο η διαφορά δυναμικού στα άκρα του είναι ανεξάρτητη από το ρεύμα που το διαρρέει.





Αν $v_s(t)=0$, τότε ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα.

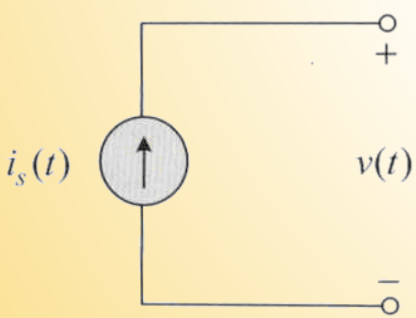
Ιδανική Πηγή Ρεύματος

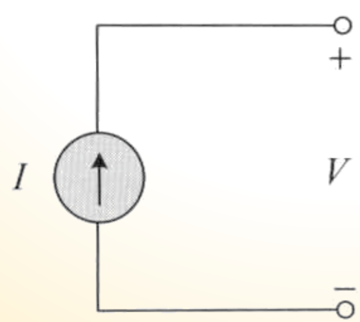
Ιδανική πηγή ρεύματος = ηλεκτρικό στοιχείο του οποίου η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει είναι ανεξάρτητη της Διαφοράς Δυναμικού στα άκρα του.

$i_s(t)$

Γενική Πηγή Ρεύματος

DC



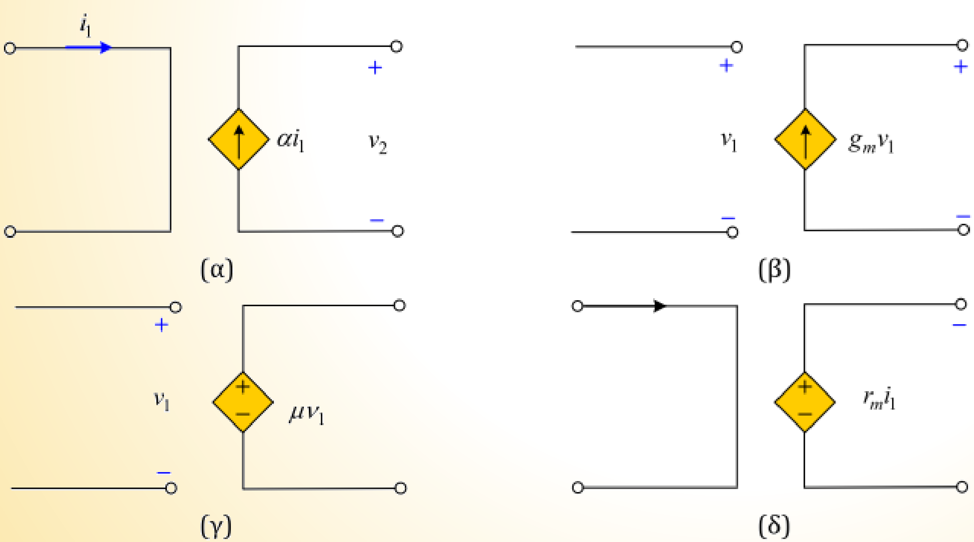


Αν $i_s(t) = 0$, τότε ισοδυναμεί με ανοικτό κύκλωμα.

Εξαρτημένες Πηγές

Εξαρτημένες Πηγές = πηγές που η τάση ή ένταση εξαρτάται από τάση ή ένταση σε άλλο σημείο του κυκλώματος.

Συνήθως υποδηλώνουν ηλεκτρονικά στοιχεία.



Σχήμα 2.7 (α) Εξαρτημένη πηγή ρεύματος από ρεύμα. (β) Εξαρτημένη πηγή ρεύματος από τάση. (γ) Εξαρτημένη πηγή τάσης από τάση. (δ) Εξαρτημένη πηγή τάσης από ρεύμα.

α = λόγος ρευμάτων

μ = λόγος τάσεων

g_m= διαγωγιμότητα

r_m= αντίσταση μεταφοράς

Εξαρτημένες Πηγές

Οι Εξαρτημένες Πηγές **δεν είναι** πηγές εισόδου στα ΗΚ.

Οι ανεξάρτητες πηγές μπορεί να προσφέρουν ή να απορροφούν ενέργεια σε ένα ΗΚ.

Ένα κύκλωμα δε μπορεί να λειτουργήσει **μόνο** με εξαρτημένες πήγες.

Ισχύς - Ενέργεια

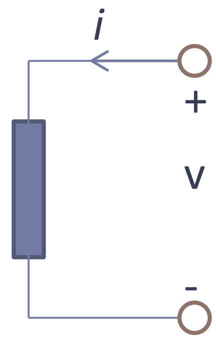
Στιγμιαία Ισχύς

$$p(t) = v(t)i(t)$$

Σχέση Ισχύος-Ενέργειας

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt}$$

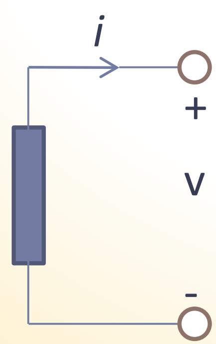
Α) Έστω στοιχείο



Αν η στιγμιαία ισχύς είναι θετική, τότε ισχύς παρέχεται και καταναλώνεται από το στοιχείο.

$$p = vi$$

Β) Έστω στοιχείο

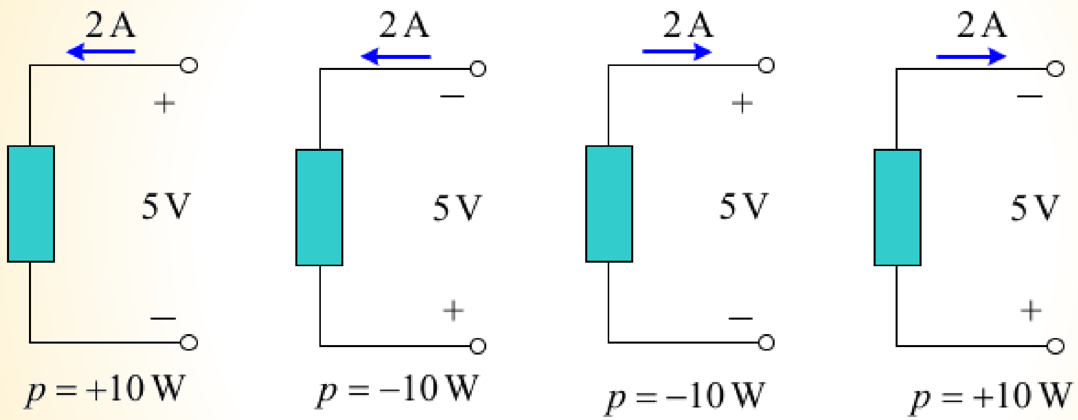


Αν η στιγμιαία ισχύς είναι αρνητική, τότε

το στοιχείο παρέχει ισχύ.

$$p = -vi$$

Ισχύς - Ενέργεια



Σχήμα 2.9 Παραδείγματα θετικής και αρνητικής ισχύος.

Ισχύς - Ενέργεια

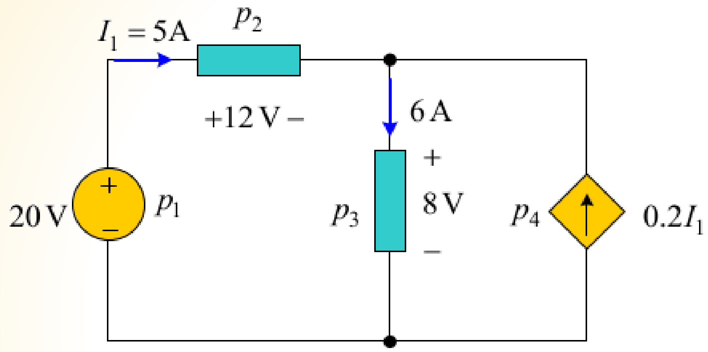
Θεώρημα Tellegen

Έστω κύκλωμα με n στοιχεία. Σε κάθε στιγμή το αλγεβρικό άθροισμα της ισχύος στο κύκλωμα είναι ίσο με μηδέν.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t) i_j(t) = 0, \forall t$$

Η ενέργεια/ισχύς στο κύκλωμα διατηρείται.

Παράδειγμα 2.1 Να προσδιοριστεί η ισχύς που παρέχεται ή απορροφάται από καθένα από τα στοιχεία του κυκλώματος.



Σχήμα 2.10

Λύση

Σύμφωνα τις φορές των ρευμάτων και τις πολικότητες των τάσεων μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα ότι

$$p_1(t) = -20 \cdot 5 = -100\,\text{W}$$

$$p_2(t) = +12 \cdot 5 = 60\,\text{W}$$

$$p_3(t) = +8 \cdot 6 = 48\,\text{W}$$

Για την εξαρτημένη πηγή ρεύματος γνωρίζουμε την τάση στα άκρα της ενώ το ρεύμα που τη διαρρέει με φορά από το + στο – της τάσης είναι ίσο με $5-6=-1\,\text{A}$. Συνεπώς

$$p_4(t) = +(-1) \cdot 8 = -8\,\text{W}$$

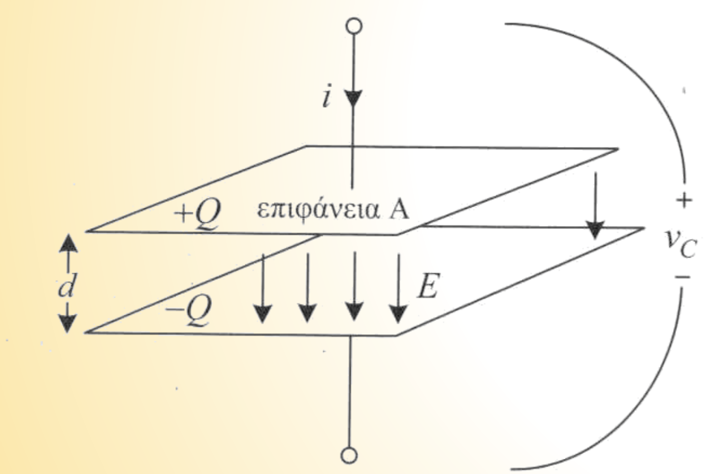
Παρατηρούμε ότι οι πηγές παρέχουν ισχύ στο κύκλωμα ενώ τα λοιπά στοιχεία απορροφούν ισχύ έτσι ώστε να ισχύει πράγματι η σχέση

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 0$$

Πυκνωτής

Πυκνωτής = παθητικό στοιχείο που μπορεί και αποθηκεύει ενέργεια με μορφή ηλεκτροστατικού πεδίου.

Προσέγγιση ιδανικού φυσικού πυκνωτή = Δύο φορτισμένες πλάκες σε απόσταση d μεταξύ τους.



Διηλεκτρικό = υλικό μεταξύ 2 πλακών.

Το d συνήθως μικρό, οπότε η ένταση του πεδίου είναι:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon A}$$

Q= φορτίο, *ε* = διηλεκτρική σταθερά, *A* επιφάνεια πλακών.

Πυκνωτής

Έστω φορτίο *q* που βρίσκεται μεταξύ των πλακών. Σε αυτό ασκείται δύναμη ίση με

$$F = qE$$

Η διαφορά δυναμικού ορίζεται ως έργο ανά μονάδα φορτίου.

Η τάση μεταξύ των οπλισμών είναι:

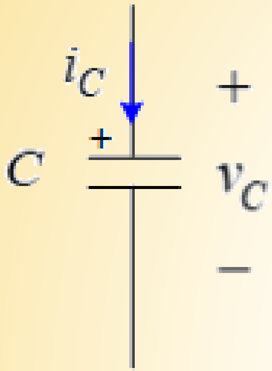
$$v_c = \int_0^d E dx = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon A} \Rightarrow Q = \underbrace{\frac{\varepsilon A}{d}}_{C} V_c \Rightarrow \boxed{Q = C v_c(t)}$$

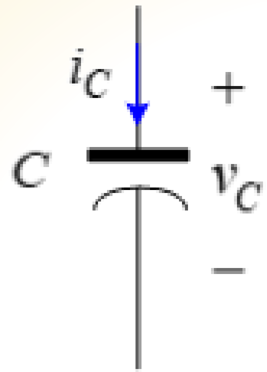
C = χωρητικότητα του πυκνωτή, μετριέται σε Farad (από Faraday)

Ξέρουμε ότι

$$i_C(t) = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \boxed{i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}}$$

Πυκνωτής





Τάση ως προς ρεύμα

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(t)dt$$

Στιγμιαία Ισχύς

$$p_C(t) = v_C(t)i_C(t) \Rightarrow p_C(t) = Cv_C(t)\frac{dv_C}{dt}$$

Ενέργεια

$$W_C(t) = \frac{1}{2}\frac{q_C^2(t)}{C} \Rightarrow W_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t)$$

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p_C(t)dt = \int_{-\infty}^{t} Cv_C(t)\frac{dv_C(t)}{dt}dt$$

$$= \int_{v_C(-\infty)}^{v_C(t)} Cv_C(t)dv_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) \ \text{Joules}$$

Επειδή $v_C(-\infty) = 0$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$w_C(t) = \frac{1}{2}\frac{q_C^2(t)}{C}$$

Πυκνωτής

Τάση ως προς ρεύμα

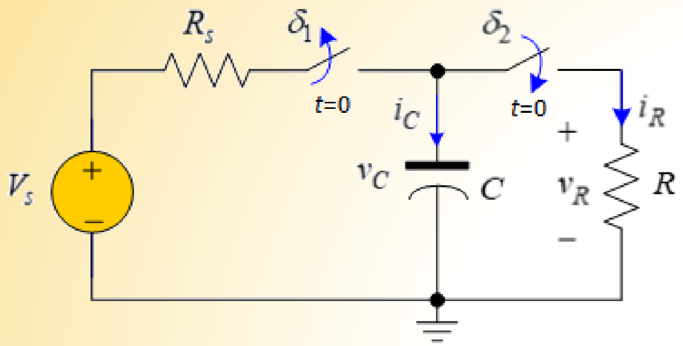
$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t)dt \Rightarrow \boxed{v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(t)dt}$$

Στιγμιαία Ισχύς

$$p_C(t) = v_C(t)i_C(t) \Rightarrow \boxed{p_C(t) = Cv_C(t)\frac{dv_C}{dt}}$$

Ενέργεια

$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{2}\frac{q_C^2(t)}{C}} \Rightarrow \boxed{W_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t)}$$



$$p_C(t) = v_C(t) i_C(t) = v_C(t) C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή ισούται με

$$w_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p_C(t)dt = \int_{-\infty}^{t} C v_C(t) \frac{dv_C(t)}{dt} dt$$

$$= \int_{v_C(-\infty)}^{v_C(t)} C v_C(t) dv_C(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) \ \text{Joules}$$

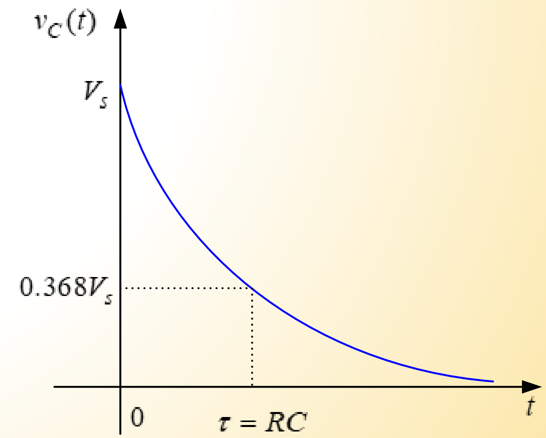
Επειδή $v_C(-\infty) = 0$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως

$$w_C(t) = \frac{1}{2}\frac{q_C^2(t)}{C}$$

1. Διακόπτης δ_1 κλειστός δ_2 ανοιχτός:
   φόρτιση: $Q = CV_s$
   τάση: $v_C(t) = V_s$
2. Διακόπτης δ_1 ανοιχτός δ_2 κλειστός:
   Αποφόρτιση πυκνωτή:

$$i_R = -i_C \Rightarrow C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0 \qquad v_C(0-) = V_s$$

$$v_C(t) = V_s e^{-t/RC}, t \geq 0$$



$t = \tau$ απώλεια 86% της ενέργειας που είχε

Determine the current through a 200-μF capacitor whose voltage is shown in Fig. 6.9.

Solution:

The voltage waveform can be described mathematically as

$$v(t) = \begin{cases} 50t \text{ V} & 0 < t < 1 \\ 100 - 50t \text{ V} & 1 < t < 3 \\ -200 + 50t \text{ V} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Since $i = C\, dv/dt$ and $C = 200\ \mu$F, we take the derivative of v to obtain

$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} 50 & 0 < t < 1 \\ -50 & 1 < t < 3 \\ 50 & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 10 \text{ mA} & 0 < t < 1 \\ -10 \text{ mA} & 1 < t < 3 \\ 10 \text{ mA} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Thus the current waveform is as shown in Fig. 6.10.

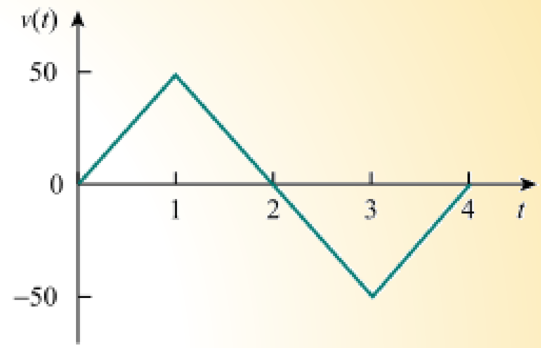


Figure 6.9 For Example 6.4.

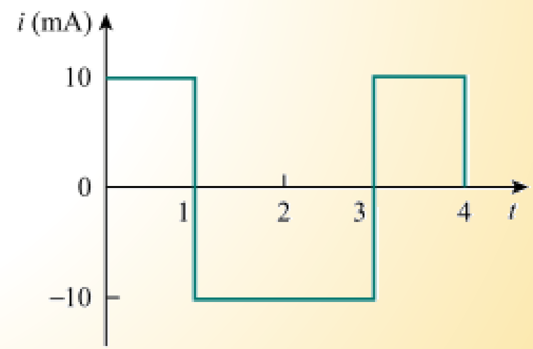


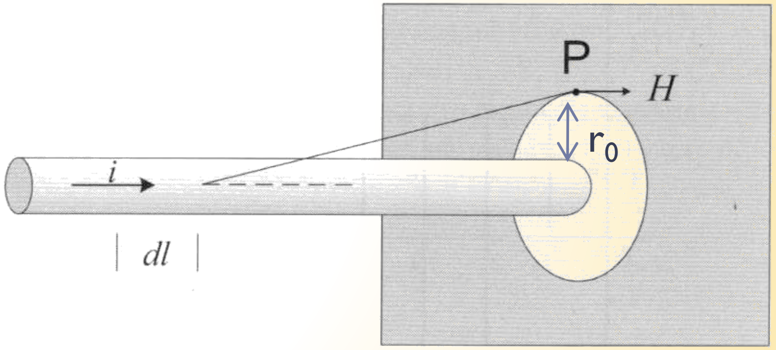
Figure 6.10 For Example 6.4.

Πηνίο

Πηνίο = παθητικό στοιχείο που μπορεί και αποθηκεύει ενέργεια με μορφή μαγνητικού πεδίου.

Νόμος Biot-Savart: Η ένταση του μαγνητικού πεδίου *H* (A/m)

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i dl \sin\theta}{4\pi r^2}$$



Για έναν αγωγό απείρου μήκους

$$H = \frac{1}{2\pi r_0}$$

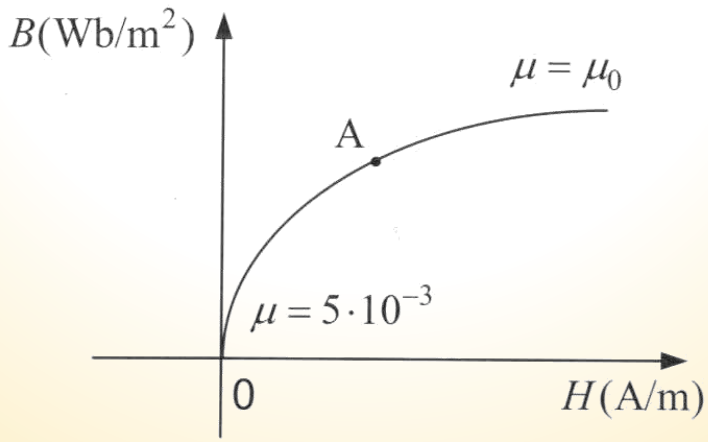
Πηνίο

Μαγνητική Επαγωγή/Πυκνότητα Μαγνητικής Ροής (Weber/m^2)

$$B = \mu H$$ μ = Μαγνητική διαπερατότητα του αγωγού

Μαγνητική διαπερατότητα του κενού μ_0 = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

Γενικά η σχέση *B* - *H* είναι μη-γραμμική.



Πηνίο

Έστω πεδίο επαγωγής B.

Η πεπλεγμένη μαγνητική ροή που περνάει από επιφάνεια *dA* είναι

$$\Phi = \int B \cos\theta dA$$

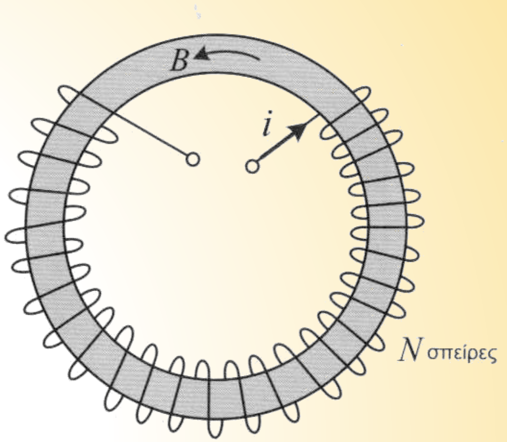
Γωνία μεταξύ *B* και *dA* .

Αν έχουμε *N* αγωγούς, τότε η Συνολική Πεπλεγμένη Μαγνητική Ροή είναι:

$$\Psi = N\Phi$$

Πηνίο

Έστω κυλινδρικό πηνίο (*N* σπείρες, ρεύμα έντασης *i*, πυρήνας μήκους *l*, επιφάνεια σπείρας *A*)



Μαγνητική Επαγωγή $$B = \frac{\mu N i}{l}$$

Πυκνότητα Ροής $$\Phi = \frac{\mu N i A}{l}$$

Συνολική Ροή $$\Psi = \frac{\mu N^2 i A}{l}$$

Συντελεστής Αυτεπαγωγής = Αυτεπαγωγή

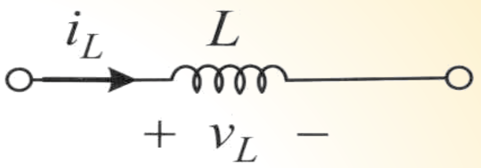
$$\boxed{L = \frac{d\Psi}{di}} = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

σε Henry (H)

Έτσι $\Psi = Li$ (Γραμμικό Πηνίο)

Πηνίο

Σχέσεις τάσης ρεύματος



$$v_L(t) = \frac{d\Psi}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt$$

Αποθήκευση Ενέργειας σε πηνίο

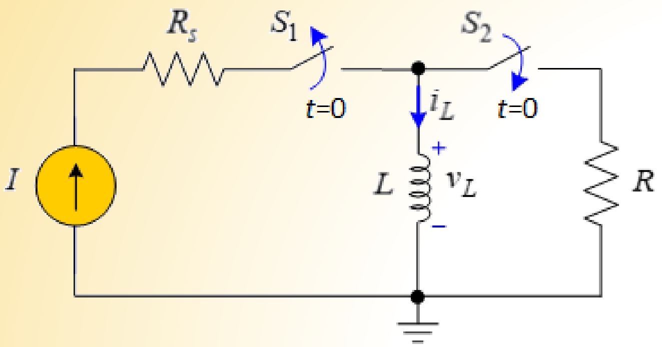
Στιγμιαία Ισχύς

$$p_L(t) = v_L(t)i_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}i_L(t)$$

Ενέργεια

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di_L(t)}{dt}i_L(t)dt = \int_{i_L(-\infty)}^{i_L(t)} Li_L(t)di_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$$

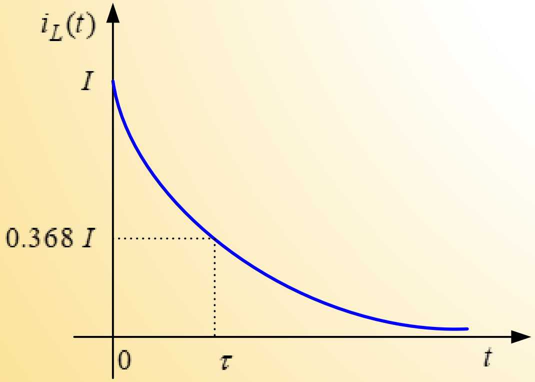
Φόρτιση-Εκφόρτιση πηνίου



$$i_L(t) = I \quad \text{για} \quad t \le 0-$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = 0 \Rightarrow i_L(t) = Ie^{-\frac{R}{L}t} = Ie^{-\frac{t}{L/R}}$$

Σταθερά χρόνου: $\tau = L/R$

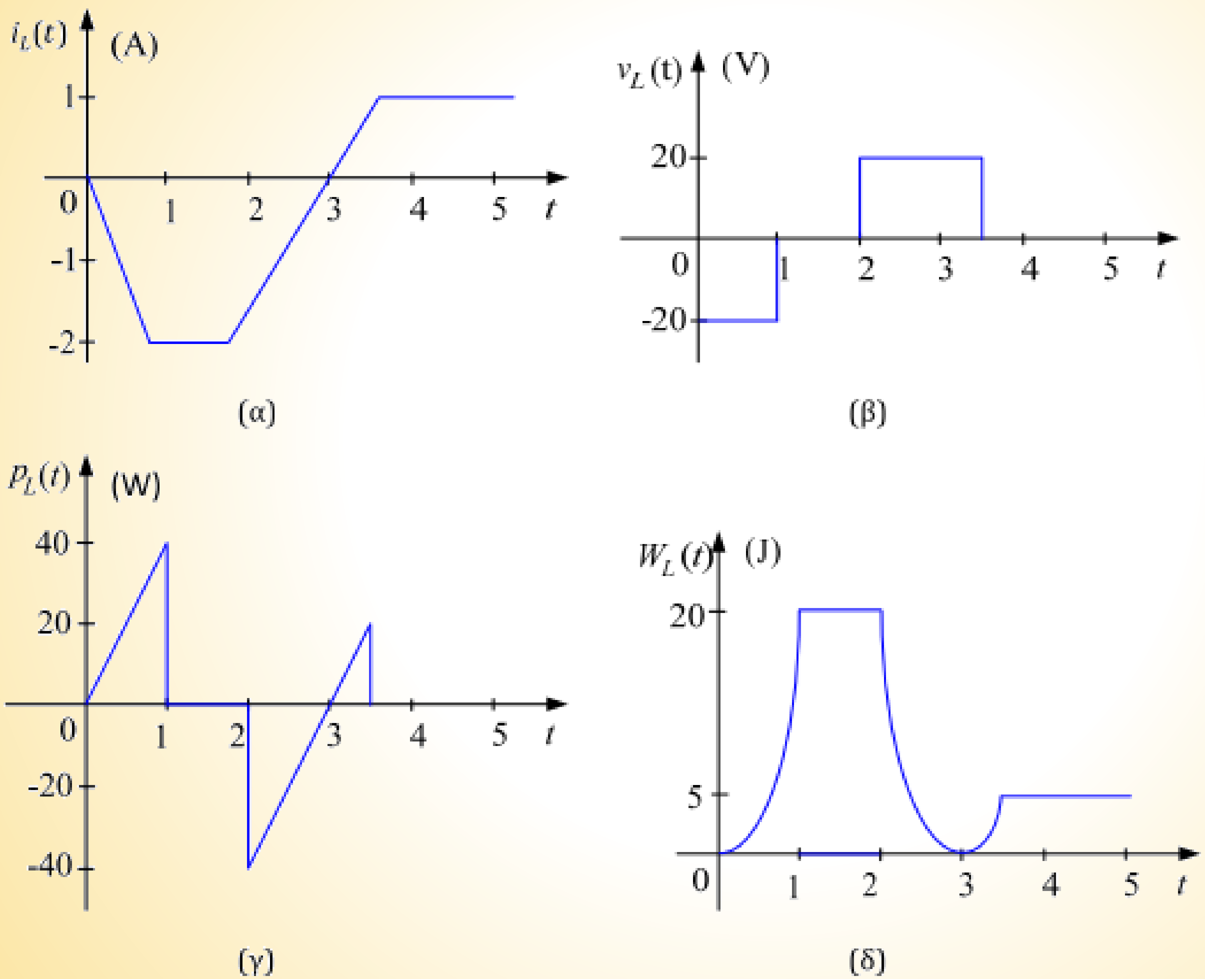


Στιγμιαία ισχύς

$$p_L(t) = v_L(t) i_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} i_L(t)$$

Ενέργεια

$$W_L(t) == \frac{1}{2} L I^2(t)$$



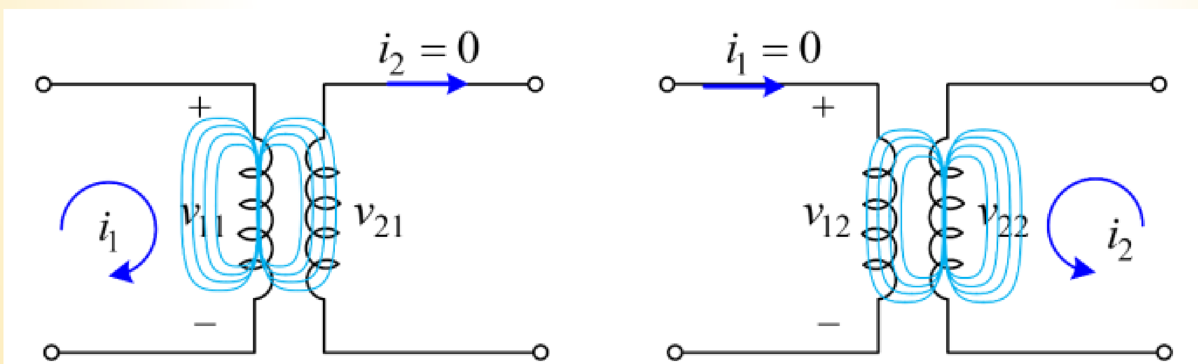
Σχήμα 2.35 Κυματομορφές (α) ρεύματος, (β) τάσης, (γ) ισχύος, και (δ) ενέργειας.

Αλληλεπαγωγή

Αλληλεπαγωγή = Ηλεκτρομαγνητική ενέργεια μεταφέρεται από ένα σημείο του κυκλώματος σε άλλο, λόγω μαγνητικών πεδίων.

Δύο κυκλώματα που συνδέονται με κοινό μαγνητικό πεδίο καλούνται συζευγμένα (coupled).

Δύο πηνία συζευγμένα = Αμοιβαία επαγωγή/Αλληλεπαγωγή ***M*** (Henry)



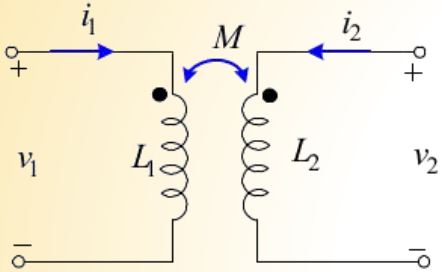
Συντελεστής Σύζευξης:

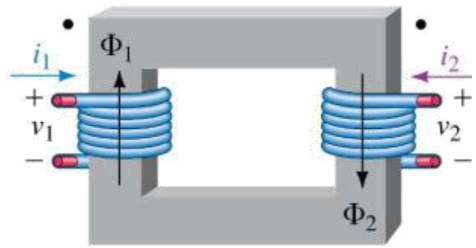
$$k = \frac{|M|}{L_1 L_2}$$

Αλληλεπαγωγή

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

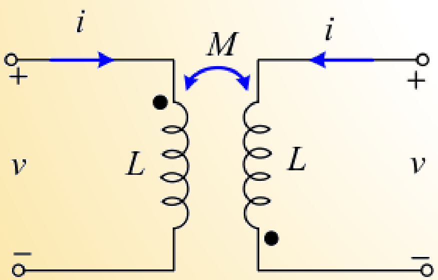


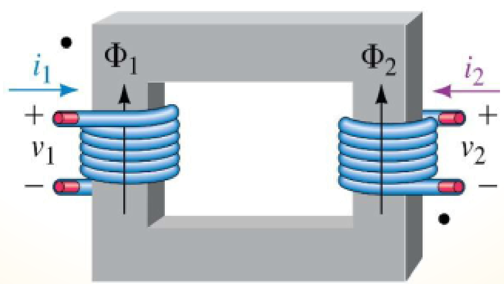


Θετική Αλληλεπαγωγή

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$





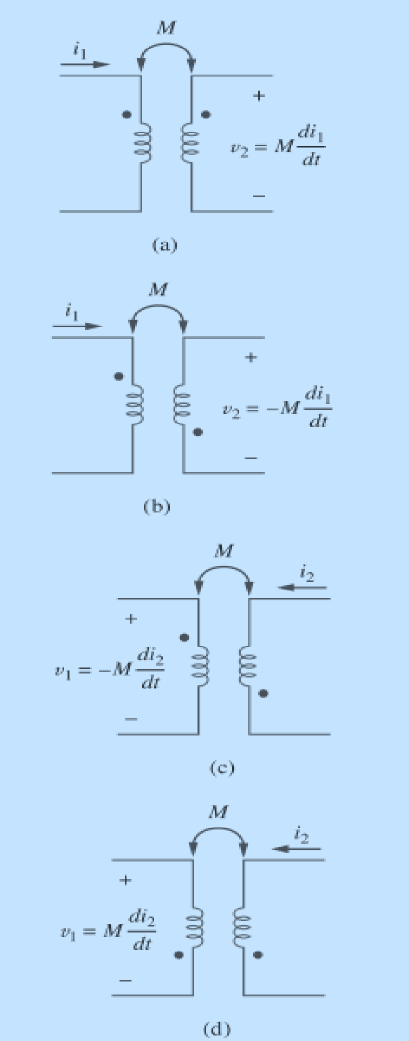
Αρνητική Αλληλεπαγωγή

Οι τελείες καθορίζουν τις φορές τυλιγμάτων, <u>όχι</u> τις φορές ρευμάτων.

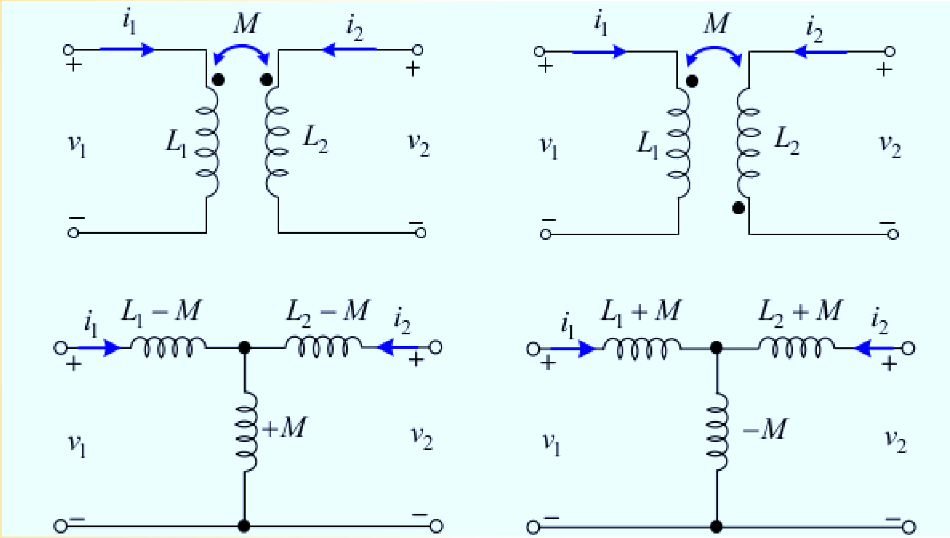
Αλληλεπαγωγή

Κανόνας για θετική ή αρνητική αλληλεπαγωγή:

- Εάν ένα ρεύμα εισέρχεται από μια τελεία σε ένα πηνίο, τότε η αμοιβαία επαγόμενη τάση στο άλλο πηνίο είναι θετική με το + της τάσης αυτής στη θέση της τελείας του άλλου πηνίου.
- Εάν ένα ρεύμα αφήνει μια τελεία σε ένα πηνίο, τότε η αμοιβαία επαγόμενη τάση στο άλλο πηνίο είναι αρνητική με το - της τάσης αυτής στη θέση της τελείας του άλλου πηνίου.



Ισοδύναμα Κυκλώματα Αλληλεπαγωγής

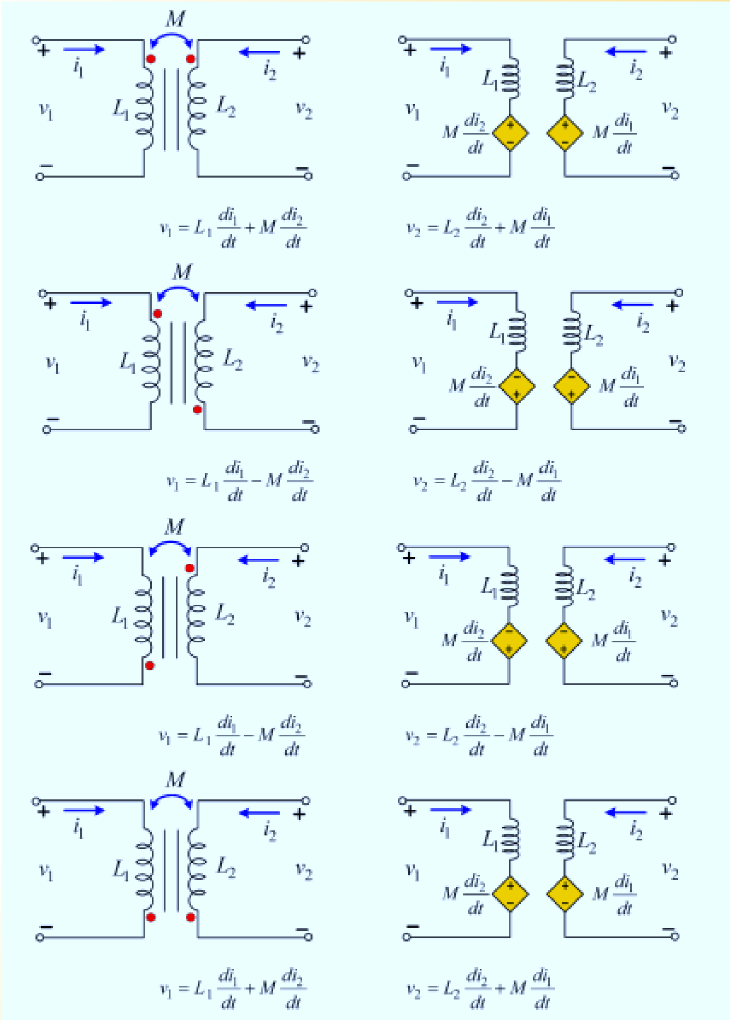


$$v_1 = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$\Rightarrow v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

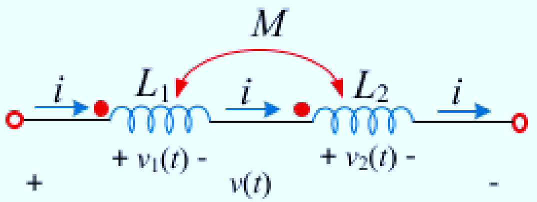
$$v_1 = (L_1 + M)\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

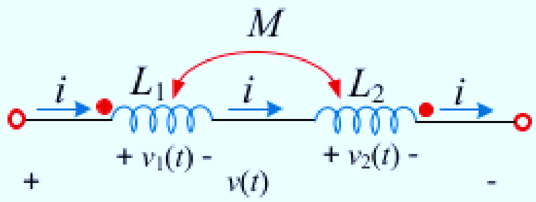
$$\Rightarrow v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$



Ισοδύναμα Κυκλώματα Αλληλεπαγωγής

Σύνδεση σε σειρά



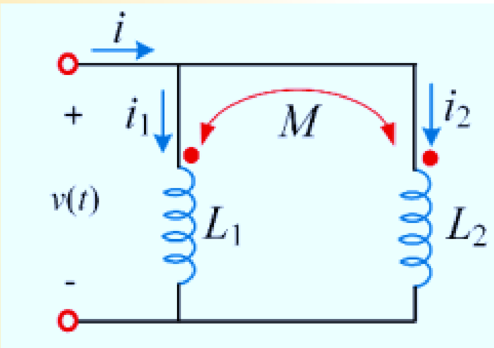


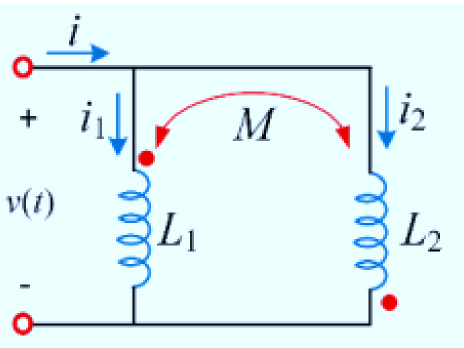
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

$$v(t) = L_1 \frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

Παράλληλη Σύνδεση





$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

$$v = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$v = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

Λύνοντας ως προς τις παραγώγου προκύπτει ότι

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{M - L_2}{M^2 - L_1 L_2} v$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{M - L_1}{M^2 - L_1 L_2} v$$

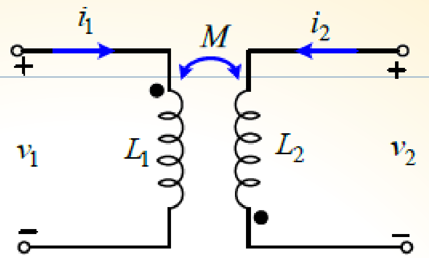
Όμως, $i = i_1 + i_2$ οπότε αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{v}{L_{eq}} = \frac{M - L_2}{M^2 - L_1 L_2} v + \frac{M - L_1}{M^2 - L_1 L_2} v$$

Έτσι τελικά

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Αλληλεπαγωγή



Στιγμιαία ισχύς:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = i_1\left(L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}\right) + i_2\left(L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}\right)$$

Ενέργεια: $w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t)dt$ Αν $i_1(-\infty) = i_2(-\infty) = 0$

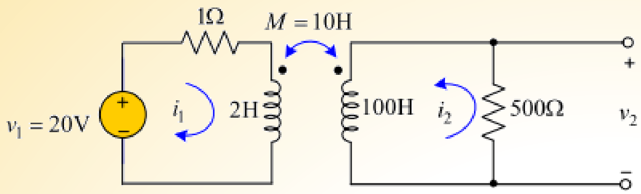
$$w(t) = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + Mi_1 i_2 = \frac{1}{2}L_1\left(i_1 + \frac{M}{L_1}i_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)i_2^2$$

$$> 0$$

Συντελεστής σύζευξης: $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ Αν $0 \le k \le 1$, τότε το κύκλωμα είναι <u>παθητικό</u>, διαφορετικά δεν είμαστε σίγουροι .

Πρέπει $0 \le k \le 1$ για να είναι παθητικό.

Παράδειγμα 2.11 Στο κύκλωμα του Σχήματος 2.40, να υπολογιστούν τα $i_2(t)$ και $v_2(t)$.



Σχήμα 2.40

Λύση

Παρατηρούμε ότι και τα δύο ρεύματα εισέρχονται των τελειών. Έτσι οι εξισώσεις βρόχων θα έχουν τη μορφή

$$i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 10\frac{di_2}{dt} = 20$$

$$10\frac{di_1}{dt} + 100\frac{di_2}{dt} + 500 i_2 = 0$$

Την πρώτη από τις δύο παραπάνω εξισώσεις την πολλαπλασιάζουμε με -5 και στη συνέχεια προσθέτουμε τη δεύτερη, οπότε

$$-5i_1 + 50\frac{di_2}{dt} + 500 i_2 = -100 \Rightarrow i_1 = 20 + 100 i_2 + 10\frac{di_2}{dt}$$

Αντικαθιστούμε τώρα το i_1 στη δεύτερη των αρχικών εξισώσεων και μετά από πράξεις παίρνουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 11\frac{di_2}{dt} + 5 i_2 = 0$$

Με μηδενικές αρχικές συνθήκες για τα ρεύματα i_1 και i_2, η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει λύση της μορφής

$$i_2(t) = 0.199\, e^{-0.475t} - 0.199\, e^{-10.525t}, \; t \geq 0$$

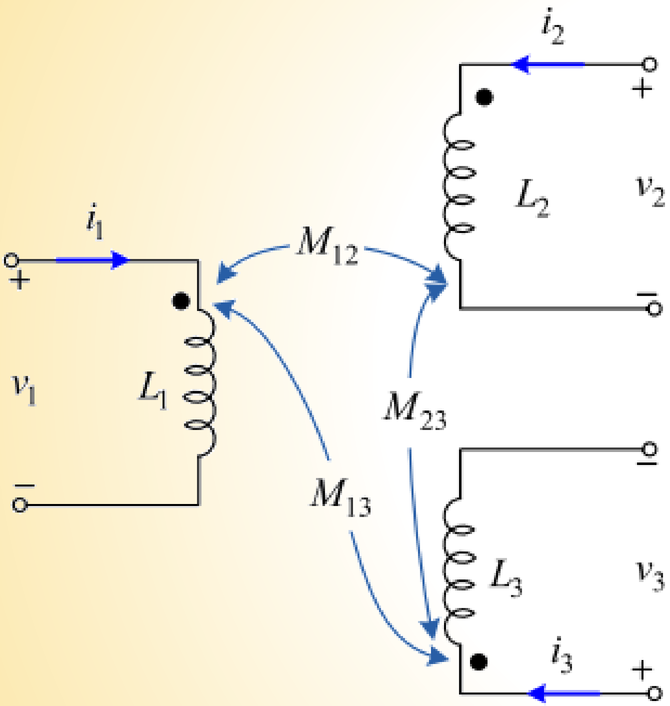
Για την τάση $v_2(t)$ από τη σχέση

$$v_2(t) = -500\, i_2(t)$$

βρίσκουμε ότι

$$v_2(t) = -99.504\, e^{-0.475t} + 99.504 e^{-10.525t}, t \geq 0$$

Σύζευξη τριών πηνίων με Αλληλεπαγωγή

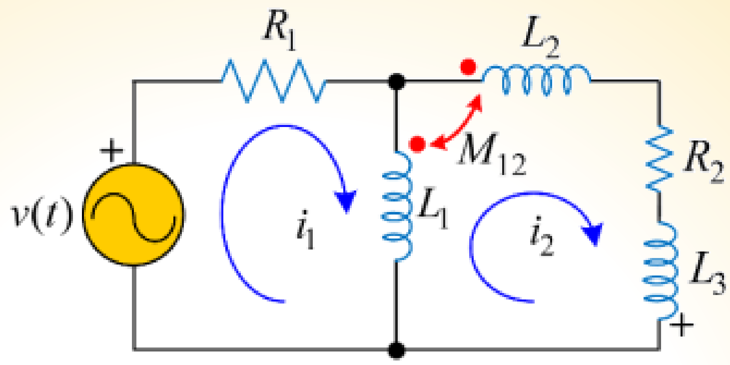


$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt} + M_{13}\frac{di_3}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12}\frac{di_1}{dt} + M_{23}\frac{di_3}{dt}$$

$$v_3 = L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13}\frac{di_1}{dt} + M_{23}\frac{di_2}{dt}$$

Παράδειγμα 2.1 Να γραφούν οι εξισώσεις βρόχων του κυκλώματος



Σχήμα 2.4

Λύση

Παρατηρούμε ότι έχουμε τα πηνία L_1, L_2 είμαι μαγνητικά συζευγμένα ενώ το πηνίο L_3 όχι.

Οι δύο εξισώσεις βρόχων έχουν τη μορφή:

Εξίσωση 1ου βρόχου:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_2) + M_{12}\frac{di_2}{dt} = v(t) \Rightarrow R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + (M_{12} - L_1)\frac{di_2}{dt} = v(t)$$

Εξίσωση 2ου βρόχου:

$$L_1 \frac{d}{dt}(i_2 - i_1) - M_{12}\frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12}\frac{d}{dt}(i_2 - i_1) + R_2 i_2 - L_3 \frac{di_2}{dt} = 0$$

ή

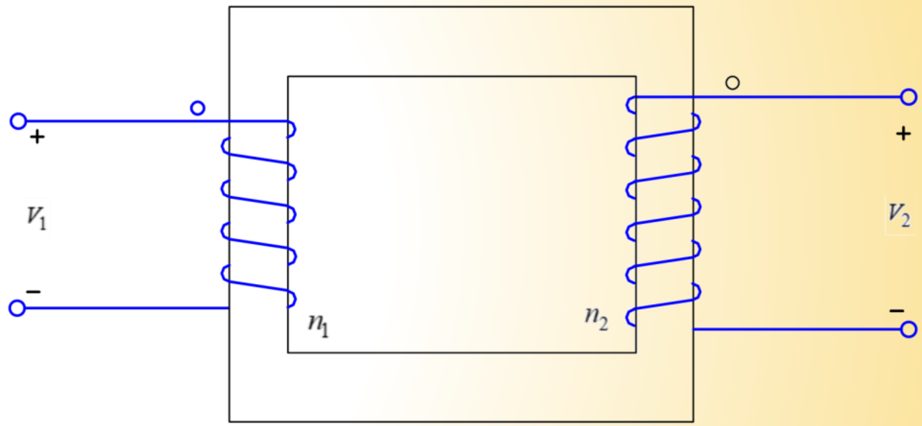
$$R_2 i_2 + (M_{12} - L_1)\frac{di_1}{dt} + (L_1 + L_2 - L_3 - 2M_{12})\frac{di_2}{dt} = 0$$

Ιδανικός Γραμμικός Μετασχηματιστής (Μ/Σ)

Ιδανικός Γραμμικός Μ/Σ = στοιχείο αλληλεπαγωγής χωρίς απώλειες.

Θεωρούμε ότι $L_1 \to \infty, L_2 \to \infty, L_1 / L_2 \in \Re$ (πεπερασμένος)

- Ροή σκέδασης πυρήνα = 0
- Ωμικές αντιστάσεις πηνίων =0
- Απώλειες ενέργειας πυρήνα =0
- Διαπερατότητα πυρήνα υψηλή



$$\Phi_1 = n_1\Phi, \Phi_2 = n_2\Phi$$

$$v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}, v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} \quad \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} = n$$

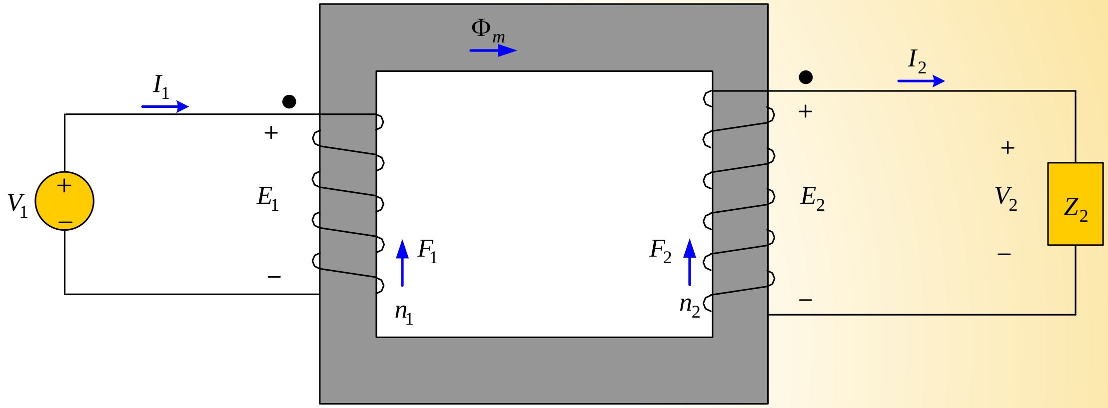
Ιδανικός Γραμμικός Μετασχηματιστής (Μ/Σ)

Μαγνητεγερτική Δύναμη *F*

$$F_1 = n_1 i_1, F_2 = n_2 i_2$$

$$F_1 = F_2 \Rightarrow n_1 i_1 = n_2 i_2 \Rightarrow$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n}$$



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = L_1 \left(1 - \frac{M}{L_1} n\right) \frac{di_1}{dt}$$

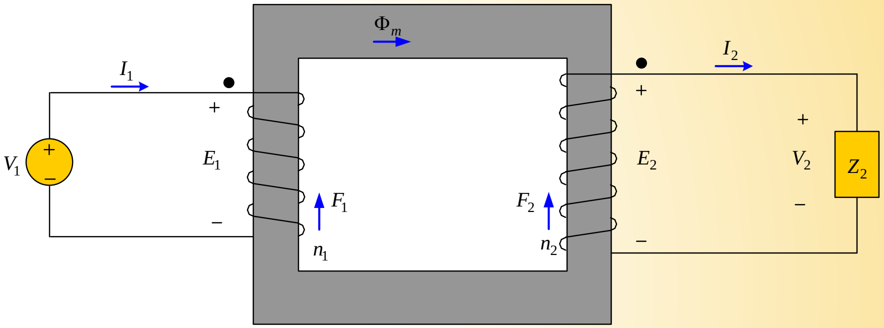
$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = M \left(\frac{L_2}{M} n - 1\right) \frac{di_1}{dt}$$

Οι τελείες καθορίζουν τις φορές τυλιγμάτων, <u>όχι</u> τις φορές ρευμάτων.

Ιδανικός Γραμμικός Μετασχηματιστής (Μ/Σ)

Οι τελείες καθορίζουν τις φορές τυλιγμάτων, <u>όχι</u> τις φορές ρευμάτων.

$$n=\frac{v_1}{v_2}=\frac{L_1\left(1-\dfrac{M}{L_1}n\right)}{M\left(\dfrac{L_2}{M}n-1\right)}\Rightarrow n^2=\frac{L_1}{L_2}$$



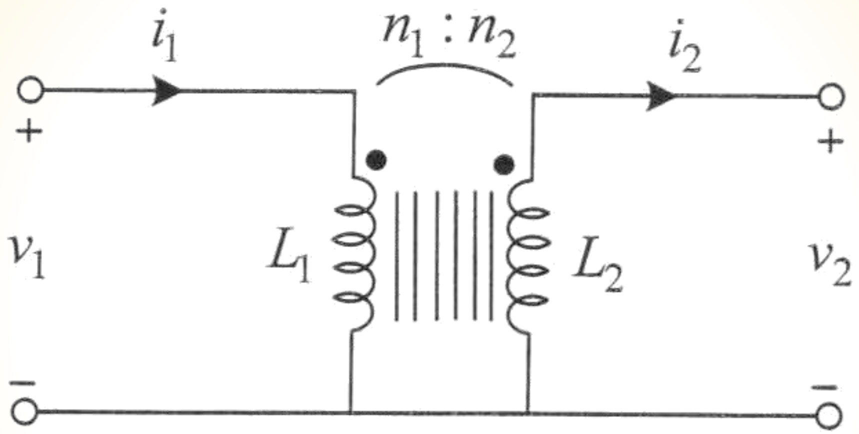
$$\boxed{n=\frac{v_1}{v_2}=\frac{i_2}{i_1}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{L_1}{M}=\frac{M}{L_2}}$$

$$M^2=L_1L_2$$

Το φορτίο Z_1 “ανακλάται” στο πρωτεύον ως $Z_1=n^2Z_2$.

Ιδανικός Γραμμικός Μετασχηματιστής (Μ/Σ)

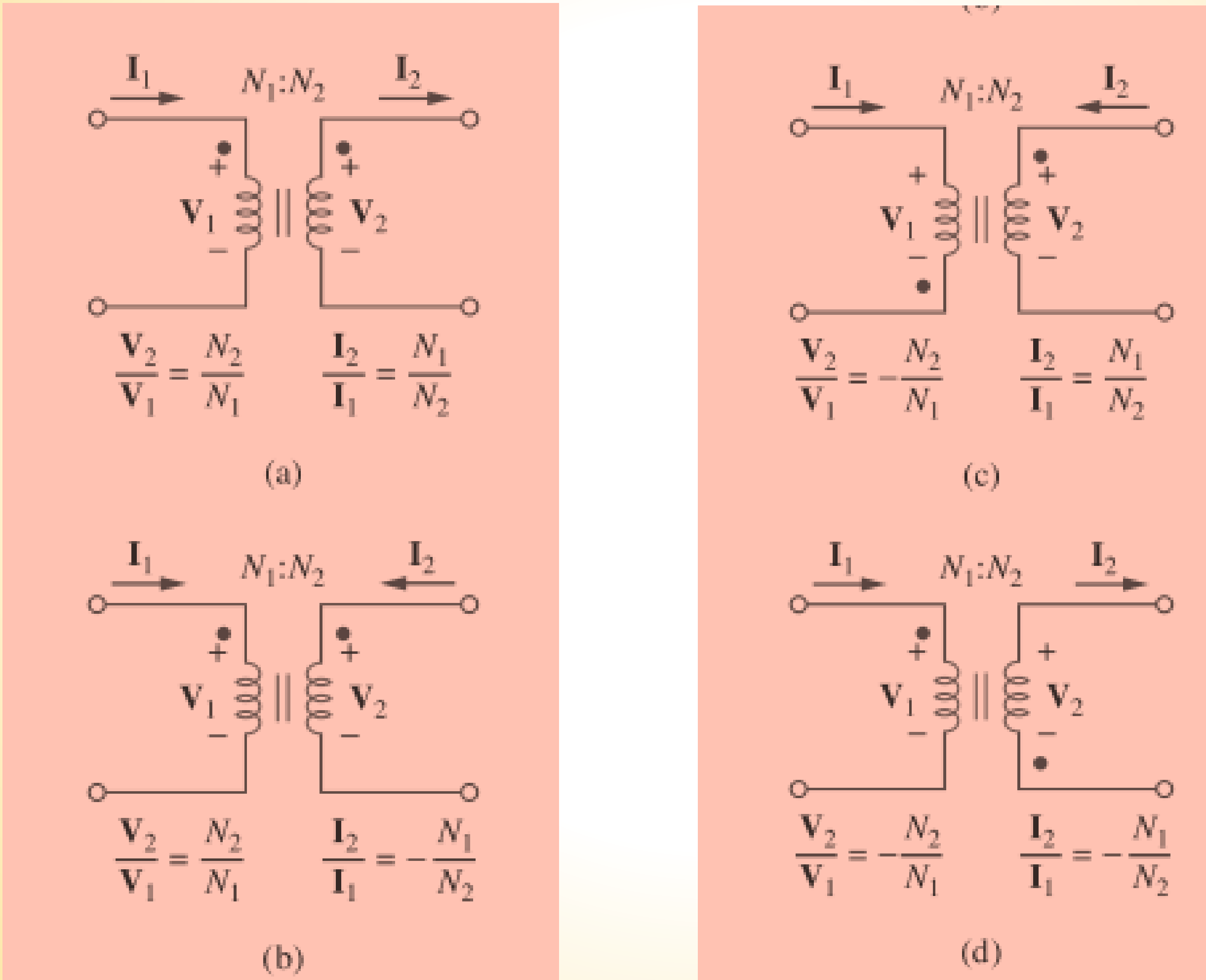
Το κυκλωματικό σύμβολο του Ιδανικού Γραμμικού Μ/Σ είναι το:



Για τα μεγέθη του παραπάνω σχήματος, ισχύουν τα κάτωθι:

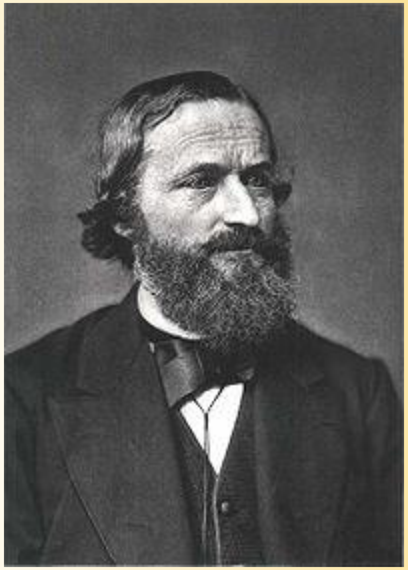
$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2}$$

Ιδανικός Γραμμικός Μετασχηματιστής (Μ/Σ)



Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff (ΝΡΚ)

Το 1848 ο Gustav Kirchhoff διατυπώνει 2 θεμελιώδεις Νόμους για τα ΗΚ.



ΝΡΚ: "*Σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος, το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων είναι ίσο με μηδέν για κάθε t*".

Έστω κόμβος με *m* ρεύματα. Τότε

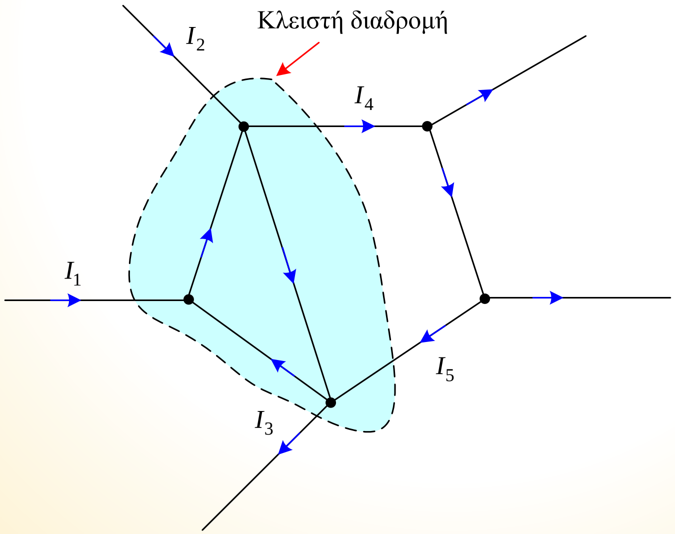
$$\sum_{j=1}^{m} n(j) i_j(t) = 0$$

$$n(j) = \begin{cases} 1, & \text{Αν το ρεύμα εισέρχεται στον κόμβο} \\ -1, & \text{Αν το ρεύμα εξέρχεται από τον κόμβο.} \end{cases}$$

Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff (ΝΡΚ)

Άρα δε συσσωρεύεται φορτίο σε κόμβο ΗΚ.

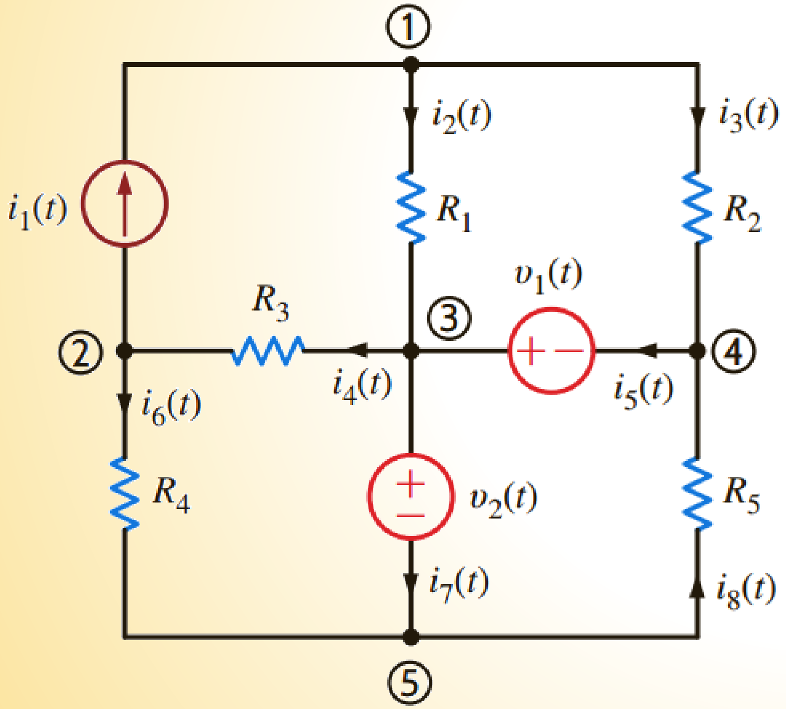
Ο ΝΡΚ εφαρμόζεται και σε υπερκόμβους (οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή).



$$I_1+I_2+I_5=I_3+I_4$$

Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff (NPK)

Παράδειγμα:



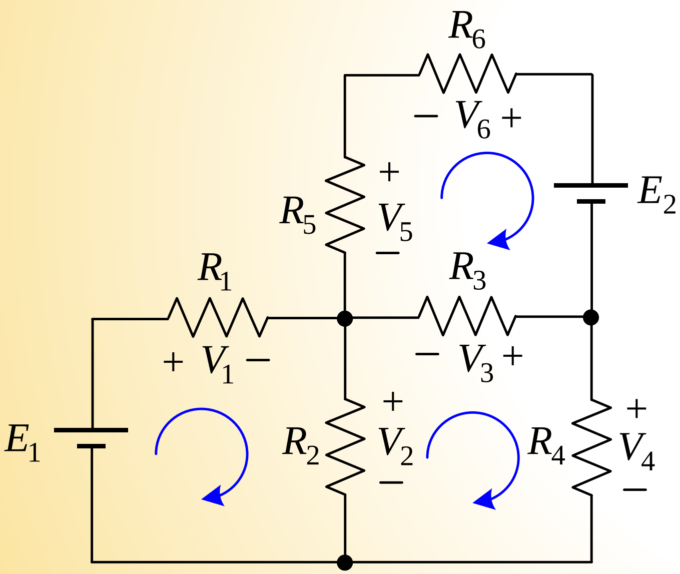
n-1 ανεξάρτητες εξ. κόμβων

Εξισώσεις κόμβων 1-5

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$
$$i_1(t) - i_4(t) + i_6(t) = 0$$
$$-i_2(t) + i_4(t) - i_5(t) + i_7(t) = 0$$
$$-i_3(t) + i_5(t) - i_8(t) = 0$$
$$-i_6(t) - i_7(t) + i_8(t) = 0$$

Νόμος Τάσεων Kirchhoff (NTK)

NTK: "*Το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων γύρω από οποιοδήποτε βρόχο είναι ίσο με μηδέν για κάθε t*".



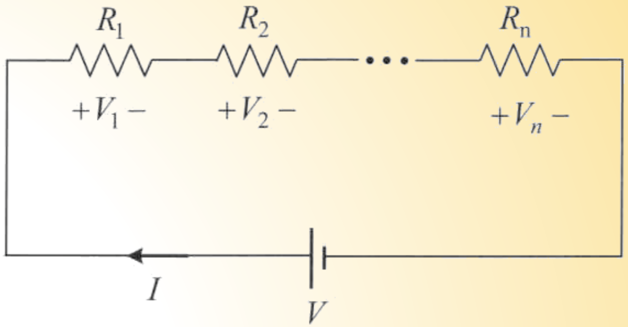
B-n+1 ανεξάρτητες εξ. βρόχων

Εξισώσεις βρόχων:

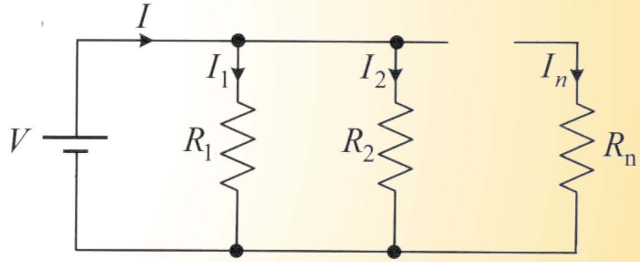
$$E_1 - V_1 - V_2 = 0$$
$$V_2 + V_3 - V_4 = 0$$
$$-V_3 + V_5 + V_6 - E_2 = 0$$

Σύνθεση Αντιστάσεων

Α) Σε σειρά $$R = R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_n$$



Β) Παράλληλα $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_n}$$



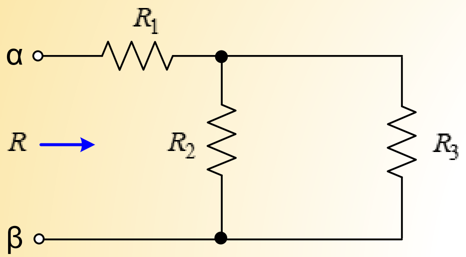
Έστω $G_i = \dfrac{1}{R_i}$ Τότε $G = G_1 + G_2 + \ldots\ldots + G_n$

Ειδικές Περιπτώσεις

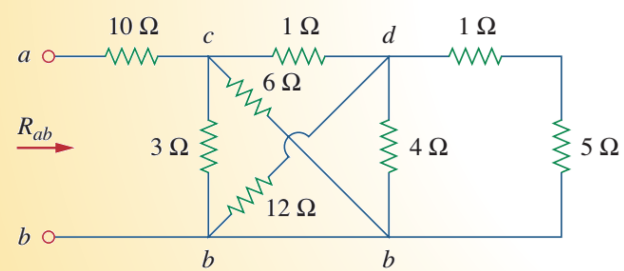
$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

Σύνθεση Αντιστάσεων

Παραδείγματα

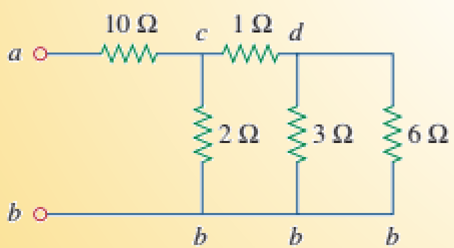


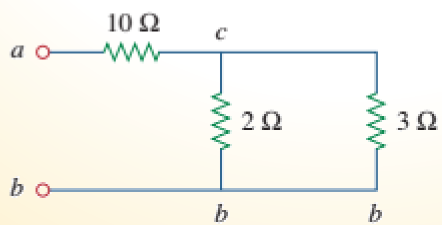
$$R = R_1 + R_2 \,//\, R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



$$12\,\Omega \parallel 4\,\Omega = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\,\Omega$$

$$3\,\Omega \parallel 6\,\Omega = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\,\Omega$$





$$1\,\Omega + 5\,\Omega = 6\,\Omega$$

$$2\,\Omega \parallel 3\,\Omega = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 1.2\,\Omega$$

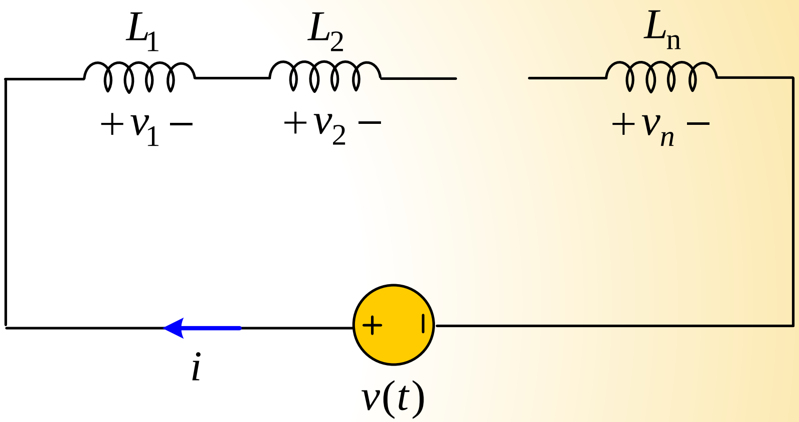
$$R_{ab} = 10 + 1.2 = 11.2\,\Omega$$

Σύνθεση Πηνίων

Ισχύει ότι ισχύει και για τις αντιστάσεις

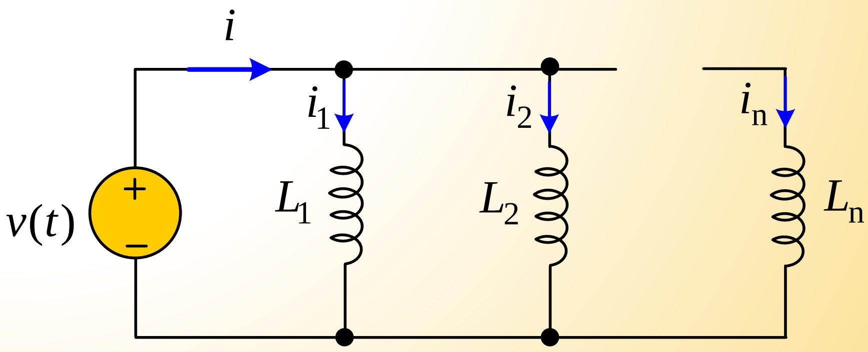
Α) Σε σειρά

$$L = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_n$$



Β) Παράλληλα

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{L_n}$$

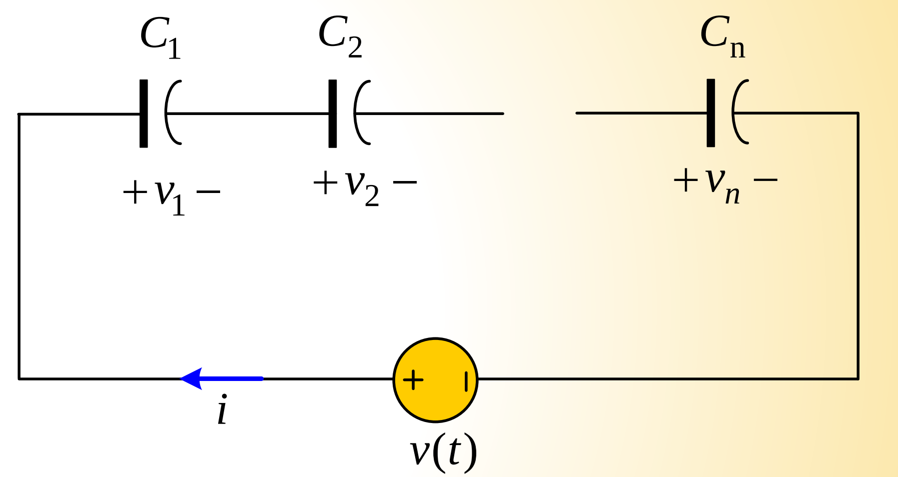


Σύνθεση Πυκνωτών

Ισχύει <u>το ανάποδο </u>από ότι ισχύει για τις αντιστάσεις

A) Σε σειρά

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_n}$$



B) Παράλληλα

$$C = C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n$$