Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 4

Ισοδύναμα Κυκλώματα

του Νικολάου Παπαμάρκου

Με βάση το βιβλίο Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Τόμος ΑΒ

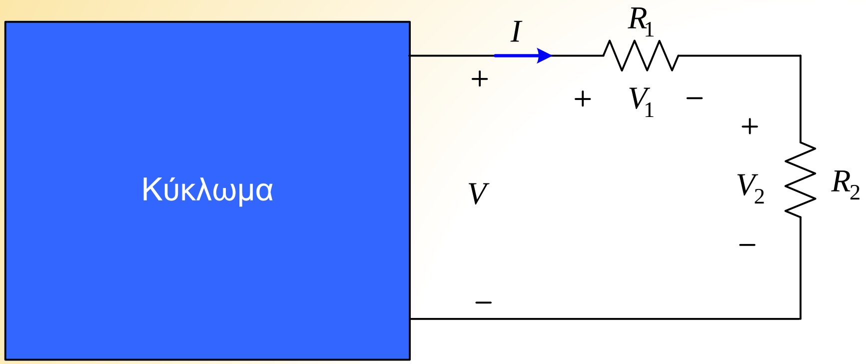
Ισοδύναμα Κυκλώματα

Ισοδύναμα Κυκλώματα = Απλοποίηση κυκλωμάτων για τη διευκόλυνση της Ανάλυσης.

Δύο κυκλώματα είναι **ισοδύναμα** αν οι μαθηματικές σχέσεις τάσης-ρεύματος στα άκρα τους είναι ίδιες μεταξύ τους.

Δύο ισοδύναμα κυκλώματα **δεν είναι** και **ενεργειακά ισοδύναμα**.

Διαιρέτης Τάσης



Ισχύει ότι:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}$$

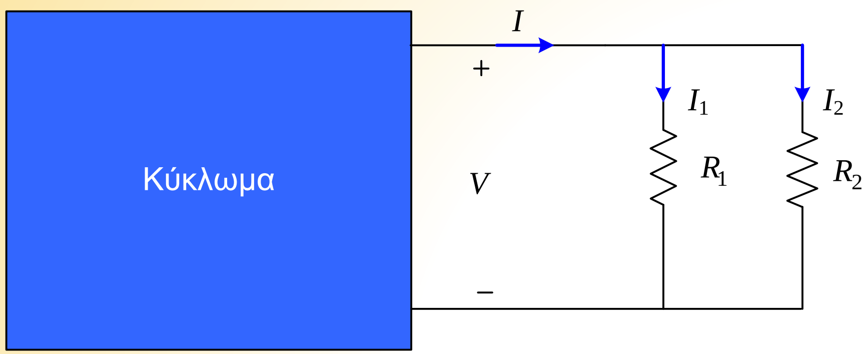
Άρα

$$V_1 = R_1 \frac{V}{R_1 + R_2} \qquad V_2 = R_2 \frac{V}{R_1 + R_2}$$

Γενική Περίπτωση: *N* αντιστάσεις σε σειρά, η τάση στα άκρα της *k* αντίστασης δίνεται από:

$$V_k = V \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N}$$

Διαιρέτης Ρεύματος



Ισχύει ότι:

$$V = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_1 R_1 = I_2 R_2$$

Άρα

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

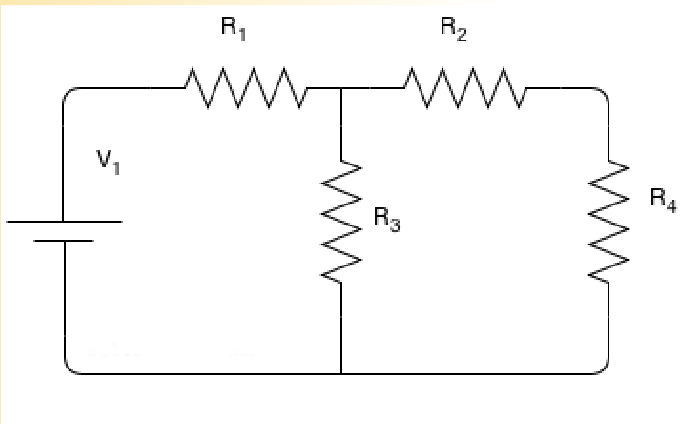
Γενική Περίπτωση: *N* αντιστάσεις παράλληλα, το ρεύμα στην *k* αντίσταση δίνεται από:

$$I_k = I\frac{G_k}{G_1 + G_2 + \ldots + G_N} = I\frac{\dfrac{1}{R_k}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \ldots + \dfrac{1}{R_N}}$$

Παράδειγμα Διαιρέτη Τάσης

Να υπολογιστούν οι τάσεις πάνω στις αντιστάσεις R_2, R_3 και R_4

$V_1 = 20V, R_1 = 10\Omega, R_2 = 5\Omega, R_3 = 30\Omega$ και $R_4 = 10\Omega$

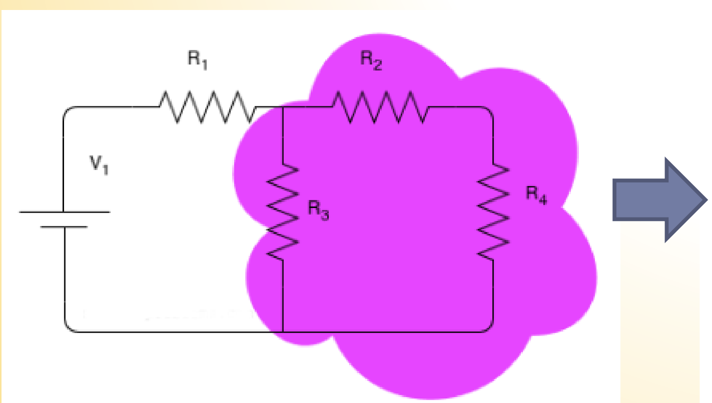


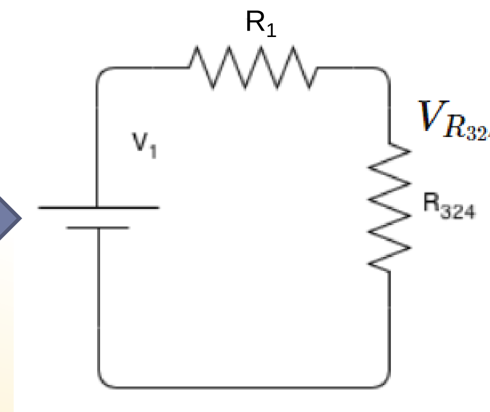
Λύση:

$$V_{R_3} \neq \frac{R_1}{R_1+R_3} V_1$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 5\Omega + 10\Omega = 15\Omega$$

$$R_{324} = R_3 || R_{24} = 30\Omega || 15\Omega = \frac{30 \times 15}{30+15} = 10\Omega$$

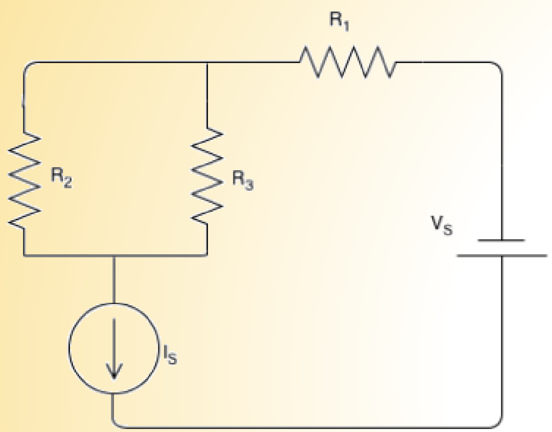




$$V_{R_{324}} = \frac{R_{324}}{R_{324}+R_1} V_1 = \frac{10}{10+10} 20 = 10V$$

Παράδειγμα Διαιρέτη Ρεύματος

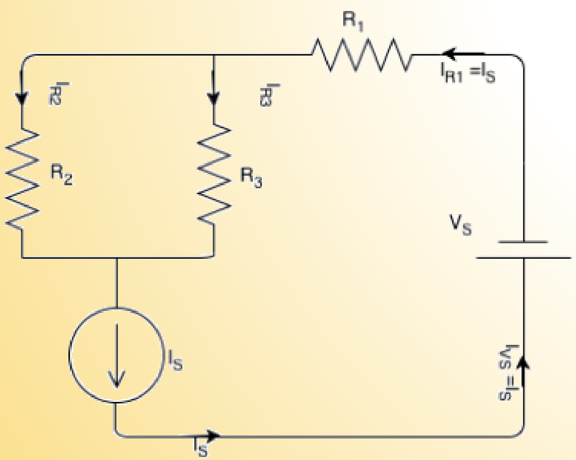
Να προσδιοριστούν τα ρεύματα των κλάδων



$R_1 = 2\Omega,\, R_2 = 4\Omega,\, R_3 = 1\Omega,\, I_S = 5A \quad V_S = 4V$

Λύση:

Προφανώς επειδή η R_1 βρίσκεται στον ίδιον κλάδο με την πηγή ρεύματος θα διαρρέεται από το ρεύμα της πηγής ρεύματος.

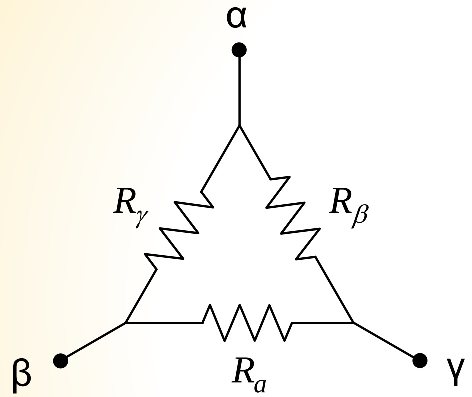


Οι αντιστάσεις R_2 και R_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένες, οπότε

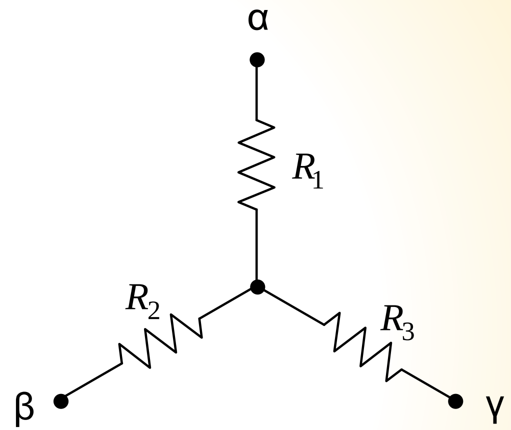
$$I_{R_2} = \frac{R_3}{R_2+R_3} \times I_S = \frac{1}{1+4} \times 5 = 1A$$
$$I_{R_3} = \frac{R_2}{R_2+R_3} \times I_S = \frac{4}{1+4} \times 5 = 4A.$$

Μετασχηματισμός Τριγώνου-Αστέρα

Αρκετά κυκλώματα απλοποιούνται με χρήση του μετασχηματισμού Αστέρα-Τριγώνου.



Τρίγωνο

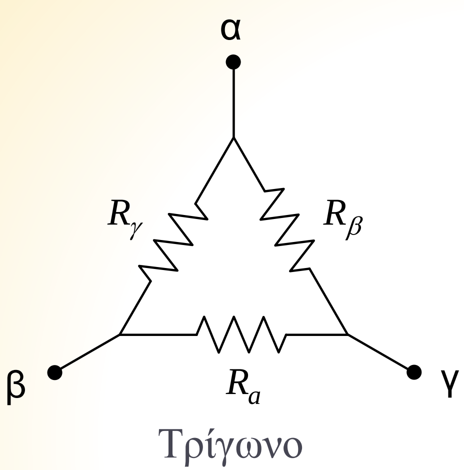


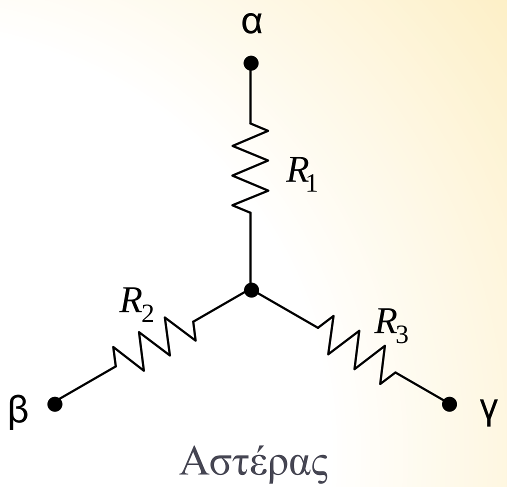
Αστέρας

Οι αντιστάσεις του αστέρα από το τρίγωνο δίνονται από:

$$R_1 = \frac{R_\beta R_\gamma}{R_\alpha + R_\beta + R_\gamma} \qquad R_2 = \frac{R_\alpha R_\gamma}{R_\alpha + R_\beta + R_\gamma} \qquad R_3 = \frac{R_\alpha R_\beta}{R_\alpha + R_\beta + R_\gamma}$$

Μετασχηματισμός Τριγώνου-Αστέρα





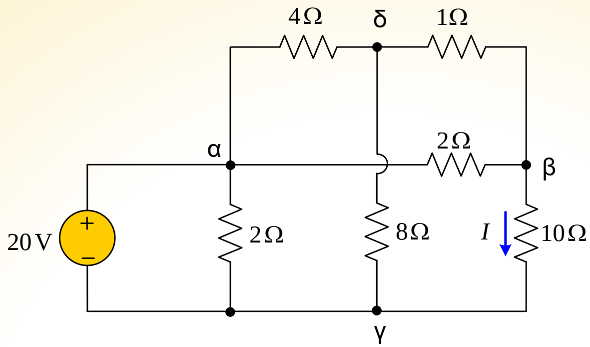
Οι αντιστάσεις του τριγώνου από τον αστέρα δίνονται από:

$$R_\alpha = R_2 R_3 \left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right] \qquad R_\beta = R_1 R_3 \left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right] \qquad R_\gamma = R_1 R_2 \left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right]$$

Στην ειδική περίπτωση ίσων αντιστάσεων, προκύπτει:

$$R_\Delta = 3R_Y$$

Παράδειγμα 4.1 Στο κύκλωμα του Σχήματος 4.4 να υπολογιστεί το ρεύμα I που διαρρέει την αντίσταση των 10Ω.



Σχήμα 4.1

Λύση

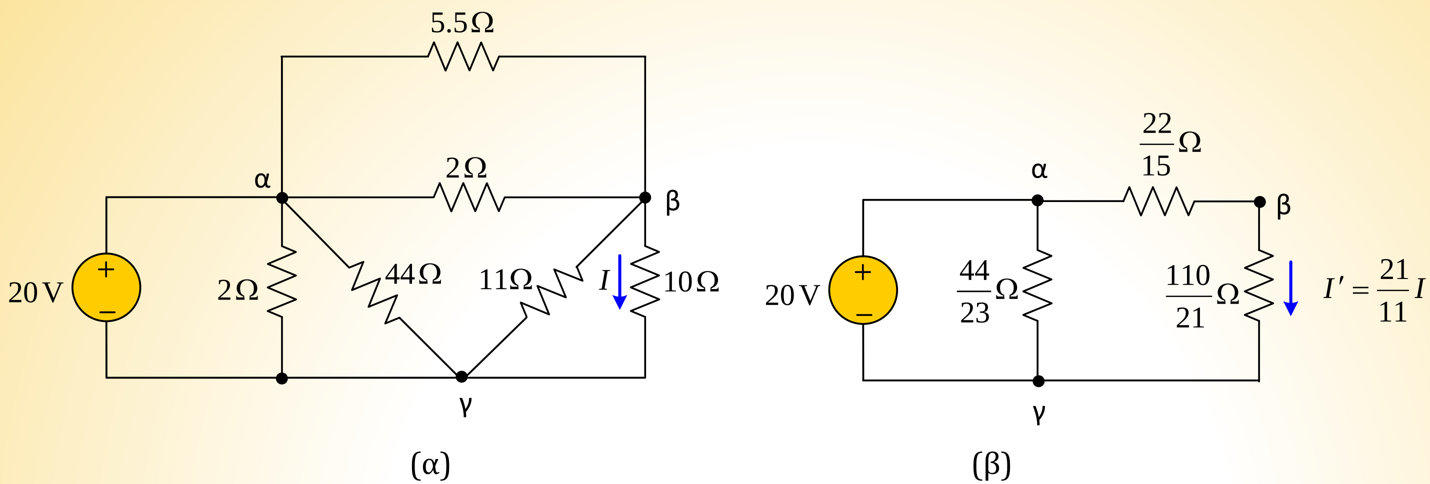
Το κύκλωμα μπορεί να απλοποιηθεί σε άλλο ισοδύναμο με τη χρησιμοποίηση του μετασχηματισμού αστέρα - τριγώνου. Ο αστέρας των αντιστάσεων 4Ω, 1Ω και 8Ω αντικαθίσταται από ένα τρίγωνο αντιστάσεων R_α, R_β και R_γ με τιμές

$$R_\alpha = 4 \cdot 8\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+1\right] = 44\,\Omega$$

$$R_\beta = 1 \cdot 8\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+1\right] = 11\Omega$$

$$R_\gamma = 1 \cdot 4\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+1\right] = 5.5\Omega$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 4.5(α) από το οποίο, μετά τη σύνθεση των παράλληλων αντιστάσεων, προκύπτει αυτό του Σχήματος 4.5(β).



Σχήμα 4.1 Ισοδύναμα κυκλώματα του αρχικού.

Η σχέση για το ρεύμα I' προκύπτει από το διαιρέτη ρεύματος που σχηματίζεται από τις αντιστάσεις $R_\beta = 11\Omega$ και 10Ω.

Αναφερόμενοι στο Σχήμα 4.5(β) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το ρεύμα I' από τη σχέση

$$I' = \frac{20}{\frac{22}{15} + \frac{110}{21}} = 2.9829\,\mathrm{A}$$

Έτσι τελικά

$$I = \frac{11}{21} I' = \frac{220}{\frac{462}{15} + 110} = 1.562\,\mathrm{A}$$

Θεώρημα Υπέρθεσης

«*Η απόκριση ενός κυκλώματος (ρεύμα ή τάση) που διεγείρεται από **περισσότερες από μία ανεξάρτητες πηγές**, προκύπτει από το **άθροισμα** των **αποκρίσεων κάθε ανεξάρτητης πηγής***»

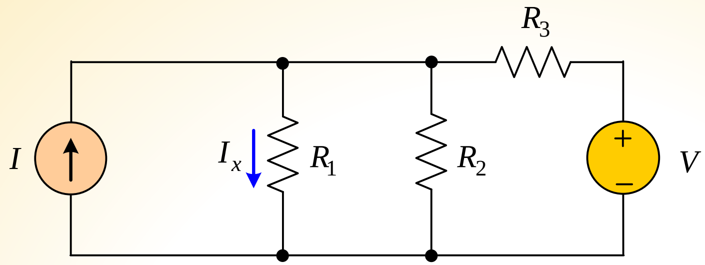
Για να βρούμε την απόκριση κάθε ανεξάρτητης πηγής μηδενίζουμε τις υπόλοιπες.

Μηδενίζουμε τις ανεξάρτητες πηγές σημαίνει:

α) πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται

β) πηγές ρεύματος ανοιχτοκυκλώνονται

Παράδειγμα 4.2 Με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος της υπέρθεσης να υπολογιστεί το ρεύμα στο κύκλωμα του Σχήματος 4.6.



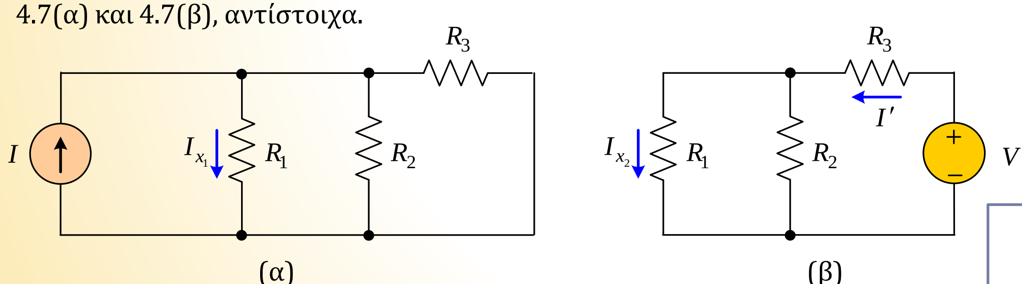
Σχήμα 4.6

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα της υπέρθεσης, το ρεύμα I_x θα ισούται με

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2}$$

όπου τα I_{x_1} και I_{x_2} είναι οι αποκρίσεις των κυκλωμάτων που δείχνονται στα Σχήματα 4.7(α) και 4.7(β), αντίστοιχα.



Σχήμα 4.7 (α) Απόκριση λόγω της πηγής ρεύματος I.
(β) Απόκριση λόγω της πηγής τάσης V.

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$I_{x_1} = I\frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \Rightarrow I_{x_1} = I\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

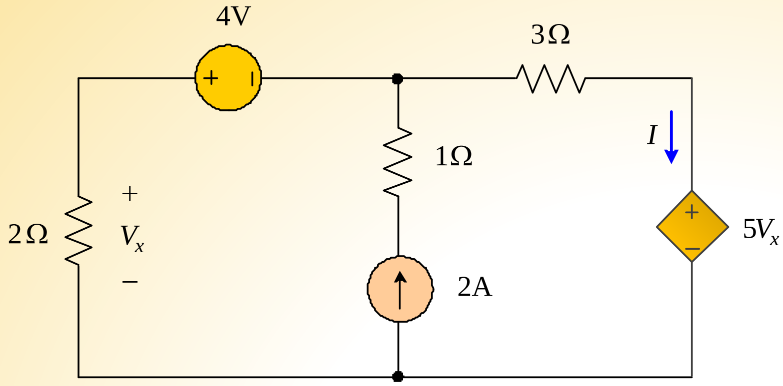
$$I_{x_2} = I'\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I' = \frac{V}{R_{\text{ολικό}}} = \frac{V}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{V(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$I_{x_2} = \frac{V R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

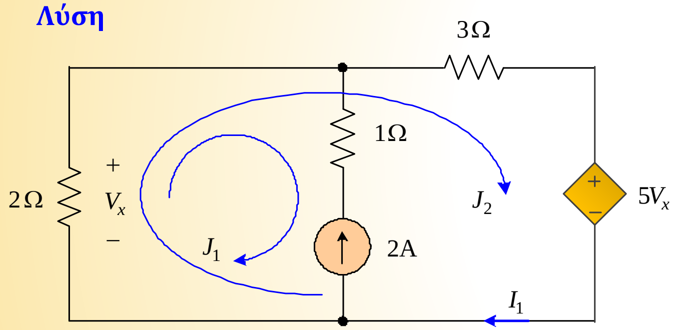
$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = \frac{R_2\left[I R_3 + V\right]}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Παράδειγμα 4.3 Το κύκλωμα του Σχήματος 4.8 περιέχει μια εξαρτημένη πηγή τάσης. Με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος της υπέρθεσης να προσδιοριστεί το ρεύμα I.



Σχήμα 4.8

Λύση



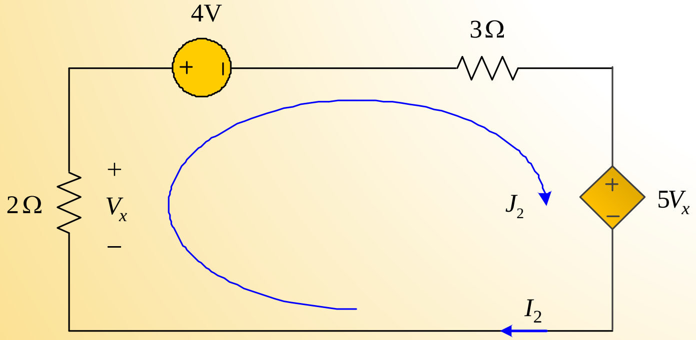
(α)

$$2J_1 + 5J_2 = -5V_x$$

$$J_1 = -2\,\text{A}$$

$$V_x = -2(J_1 + J_2) = 4 - 2J_2$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = J_2 = \frac{16}{5}\,\text{A}$$



(β)

Σχήμα 4.9

$$5J_2 = -4 - 5V_x$$

$$V_x = -2I_2$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{4}{5}\,\text{A}$$

Έτσι, η ολική απόκριση θα ισούται με

$$I = I_1 + I_2 = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} = 4\,\text{A}$$

Πρόσθετες Ασκήσεις

Άσκηση 4.4

Άσκηση 4.5

Άσκηση 4.31

Θεωρήματα Thevenin-Norton

Τα θεωρήματα *Thevenin* και *Norton* είναι ισχυρό εργαλείο απλοποίησης σύνθετων κυκλωμάτων.

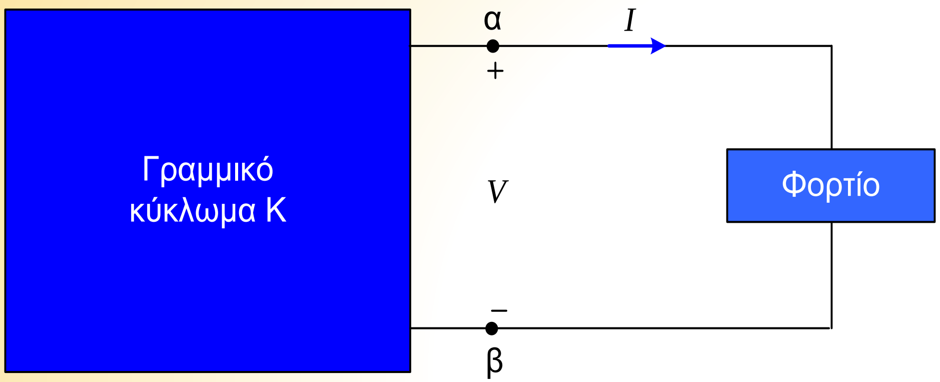
Μπορούν να μας δώσουν το ισοδύναμο ενός κυκλώματος από οποιοδήποτε ζεύγος ακροδεκτών του.

L.C. Thevenin
(1857-1926)

E.L. Norton
(1898-1983)

Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε γρήγορα την απόκριση σύνθετων κυκλωμάτων.

Θεωρήματα Thevenin - Norton



Το γραμμικό κύκλωμα αν ιδωθεί από τους ακροδέκτες α, β χωρίζεται σε 2 τμήματα :

α) Φορτίο, β) Υπόλοιπο Κύκλωμα

Για τα κυκλώματα αυτά γίνονται οι ακόλουθες υποθέσεις:

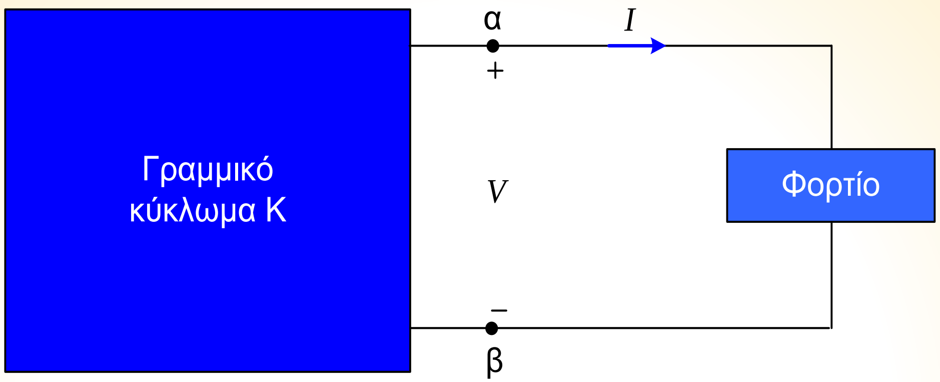
α) Τα στοιχεία μπορεί να έχουν αρχικές συνθήκες.

β) Μπορεί να υπάρχουν ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές.

γ) Δεν υπάρχει μαγνητική σύζευξη μεταξύ των 2 μερών.

δ) Το φορτίο μπορεί να είναι γραμμικό/μη-γραμμικό, χρονικά μεταβλητό ή αμετάβλητο (καμιά προϋπόθεση για φορτίο).

Θεωρήματα Thevenin - Norton



Επικοινωνία μεταξύ 2 τμημάτων γίνεται μόνο μέσω του ρεύματος *I*.

Αν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η σχέση μεταξύ *I* και *V* <u>δε θα αλλάξει</u> αν το Γραμμικό Κύκλωμα Κ <u>αντικατασταθεί</u> με το ισοδύναμο κατά *Norton* ή *Thevenin.*

Τμήματα ενός κυκλώματος μπορούν να αντικαθίστανται με απλούστερα ισοδύναμα κυκλώματα προς διευκόλυνση της ανάλυσης.

Θεώρημα Thevenin

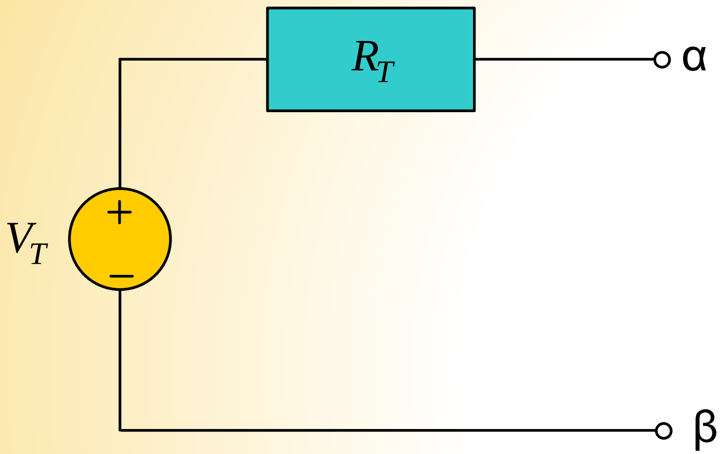
Κάθε γραμμικό μονόθυρο κύκλωμα Κ μπορεί να αντικατασταθεί από τους ακροδέκτες του α-β από το ισοδύναμό του το οποίο αποτελείται από μια πηγή τάσης σε σειρά με μια αντίσταση .

Η τάση ισούται με την τάση ανοιχτού κυκλώματος του γραμμικού κυκλώματος Κ, δηλαδή την τάση ,

Η αντίσταση είναι ίση με την αντίσταση εισόδου από τους ακροδέκτες α-β όταν μηδενιστούν όλες οι ανεξάρτητες πηγές (και όχι οι εξαρτημένες) του κυκλώματος Κ.

Με τον όρο μηδενισμός των ανεξάρτητων πηγών εννοούμε το βραχυκύκλωμα των πηγών τάσης και το ανοιχτοκύκλωμα των κλάδων που περιέχουν πηγές ρεύματος.

Ισοδύναμο κατά Thevenin



V_T = τάση ανοιχτοκύκλωσης
του Γρ. Κυκλώματος Κ.

R_T = αντίσταση του Γρ. Κυκλώματος Κ, αν
i) μηδενιστούν οι ανεξάρτητες πηγές
ii) αρχικές συνθήκες μηδέν

Μηδενίζουμε τις ανεξάρτητες πηγές σημαίνει:
α) πηγές τάσης βραχυκυκλώνονται
β) πηγές ρεύματος ανοιχτοκυκλώνονται

Θεώρημα Norton

Κάθε γραμμικό μονόθυρο κύκλωμα Κ μπορεί να αντικατασταθεί από τους ακροδέκτες του α-β από το ισοδύναμό του το οποίο αποτελείται

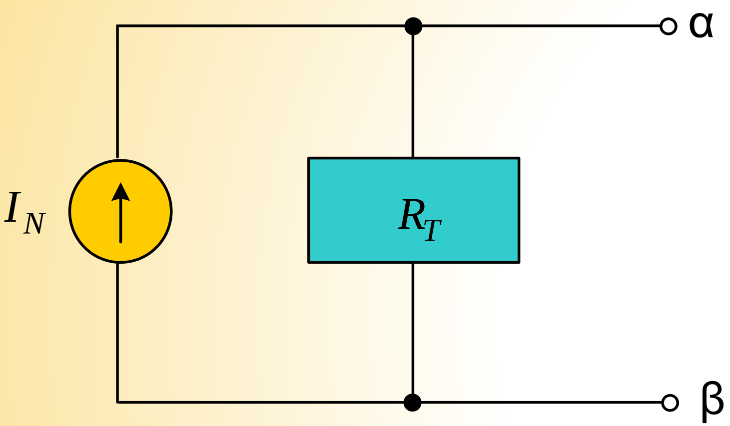
Από μια πηγή ρεύματος I_N παράλληλα με μια αντίσταση R_T.

Η πηγή ρεύματος ισούται με το ρεύμα βραχυκύκλωσης, δηλαδή με το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο α-β όταν βραχυκυκλώσουμε τους ακροδέκτες α-β.

Η αντίσταση R_T είναι ίση και ταυτίζεται με την αντίσταση Thevenin και φυσικά υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ισοδύναμο κατά Norton

Δυικό του θεωρήματος Thevenin

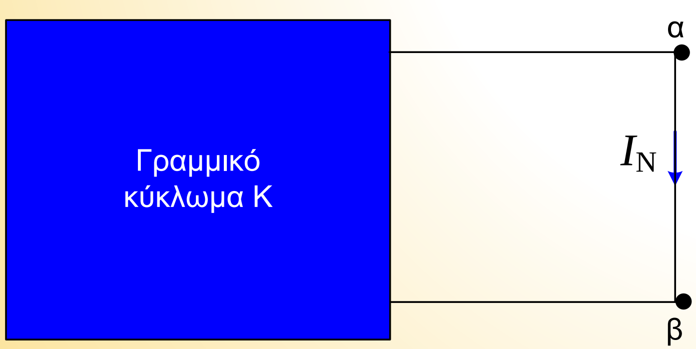


R_T = Ίδια με του θ. Thevenin

I_N = ρεύμα βραχυκύκλωσης του Γρ. Κυκλώματος Κ.

Ισχύει ότι:

$$\boxed{V_T = R_T I_N}$$



Δυικότητα των Ισοδυνάμων Κυκλωμάτων

Υπολογισμός Ισοδυνάμων κατά Thevenin - Norton

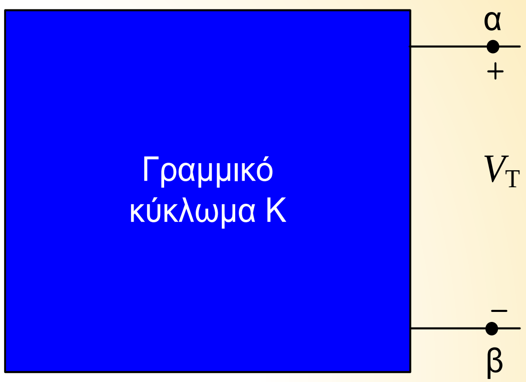
Ο υπολογισμός ενός ισοδυνάμου υπολογίζει το άλλο.

Αρκεί να βρούμε 2 από τις 3 μεταβλητές V_T, I_N, R_T.

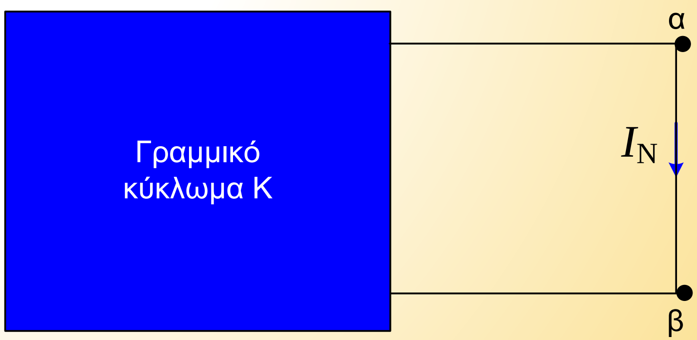
- Υπολογισμός V_T, I_N : ίδιος είτε έχει εξαρτημένες πηγές είτε όχι
- Υπολογισμός R_T : γενική μέθοδος και ειδική όταν υπάρχουν εξαρτημένες πηγές.

Υπολογισμός Ισοδυνάμων κατά Thevenin - Norton

Προσδιορισμός V_T : Μέθοδοι κόμβων, βρόχων = Τάση στα α,β όταν δεν υπάρχει φορτίο



Προσδιορισμός I_N : Μέθοδοι κόμβων, βρόχων = Ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο που βραχυκυκλώνει τα α,β.



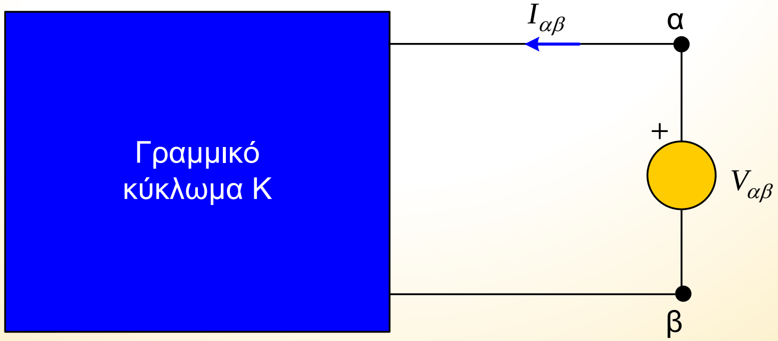
Υπολογισμός Ισοδυνάμων κατά Thevenin - Norton

Προσδιορισμός R_T :

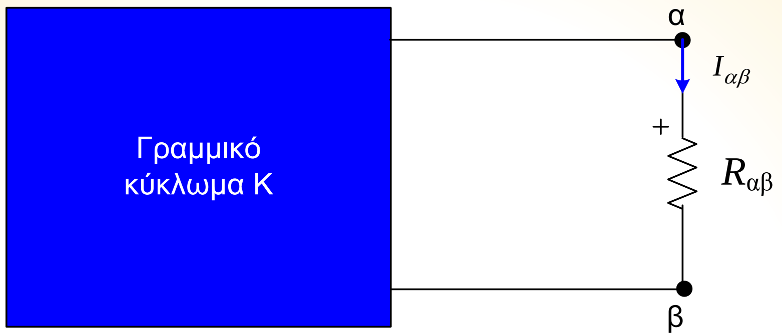
1. Αρχικές Συνθήκες κυκλώματος μηδενικές
2. Μηδενίζουμε ανεξάρτητες πηγές. Εξαρτημένες μένουν όπως είναι.
3. Υπολογίζουμε R_T στα άκρα α,β:

   α) Αν δεν υπάρχουν εξαρτημένες πηγές, βρίσκουμε R_T με σύνθεση του κυκλώματος.

   β) Αν υπάρχουν, εφαρμόζουμε πηγή τάσης γνωστής τάσης $V_{αβ}$ στα άκρα α,β. Υπολογίζουμε ρεύμα $I_{αβ}$. Τότε $R_T = V_{αβ}/I_{αβ}$.



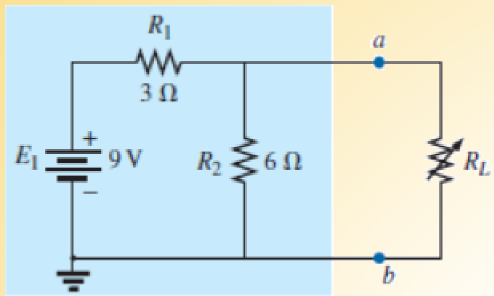
Εναλλακτική Μέθοδος Ισοδύναμου Thevenin



1. Βάζω αντίσταση $R_{\alpha\beta}$ στα άκρα α,β.
2. Υπολογίζω το ρεύμα $I_{\alpha\beta}$.
3. Το ρεύμα I_N βρίσκεται από το $$I_N = \lim_{R_{\alpha\beta}\to 0} I_{\alpha\beta}$$
4. Η τάση V_T βρίσκεται από το $$V_T = \lim_{R_{\alpha\beta}\to\infty} (R_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta})$$

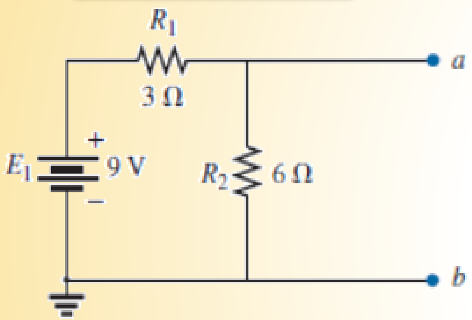
Κέρδος: Επιλύουμε 1 κύκλωμα, αντί για 2.

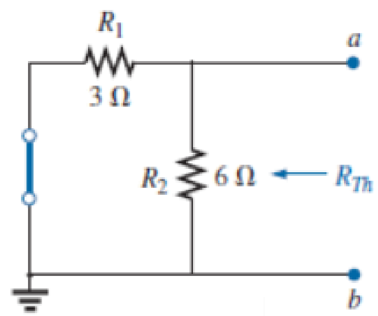
Ένα πρώτο παράδειγμα

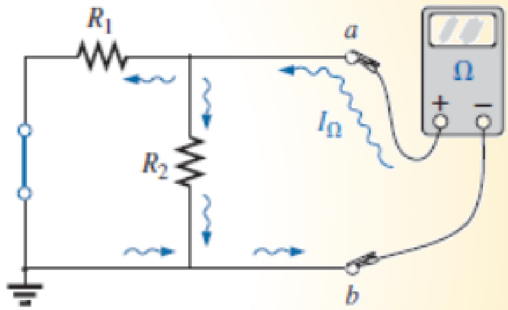


Εύρεση R_{Th}

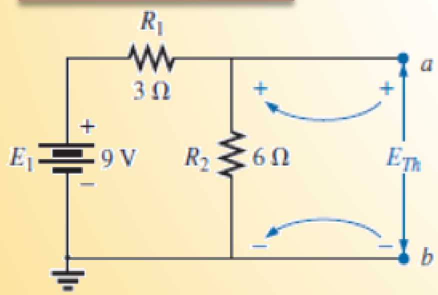
$$R_{Th} = R_1 \| R_2 = \frac{(3\,\Omega)(6\,\Omega)}{3\,\Omega + 6\,\Omega} = 2\,\Omega$$

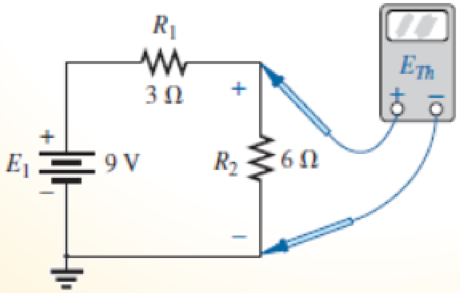






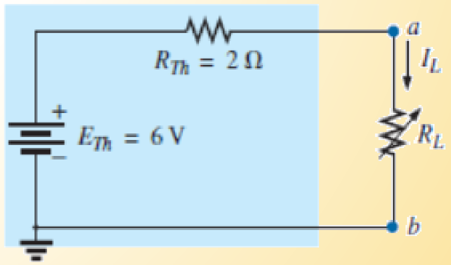
Εύρεση E_{Th}



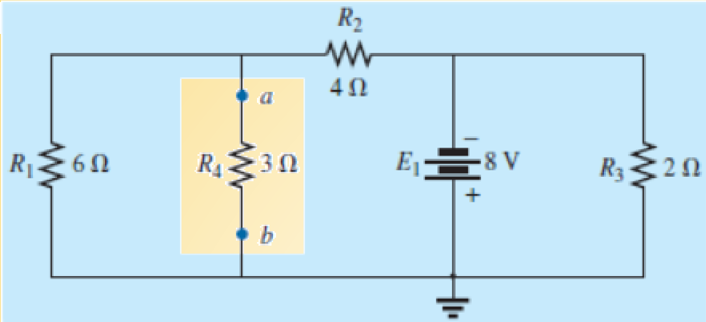


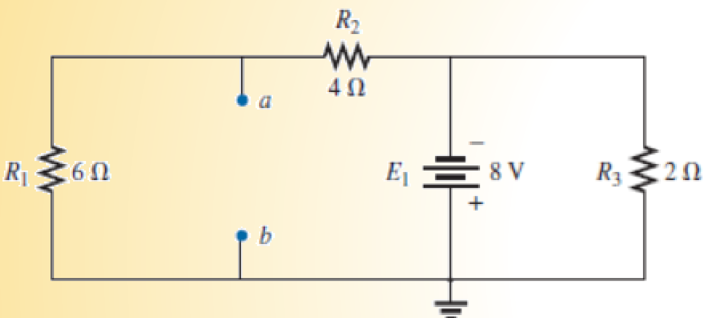
$$E_{Th} = \frac{R_2 E_1}{R_2 + R_1} = \frac{(6\,\Omega)(9\,V)}{6\,\Omega + 3\,\Omega} = \frac{54\,V}{9} = 6\,V$$

Ισοδύναμο κύκλωμα



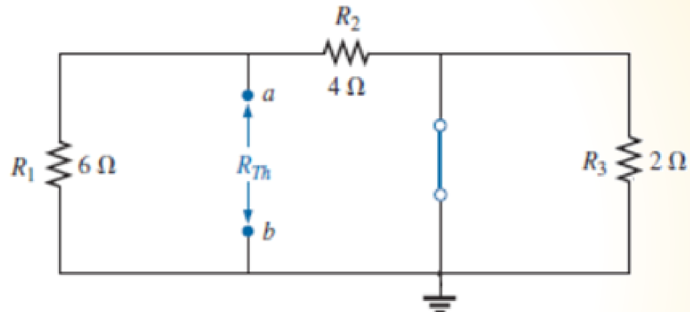
Ένα δεύτερο παράδειγμα



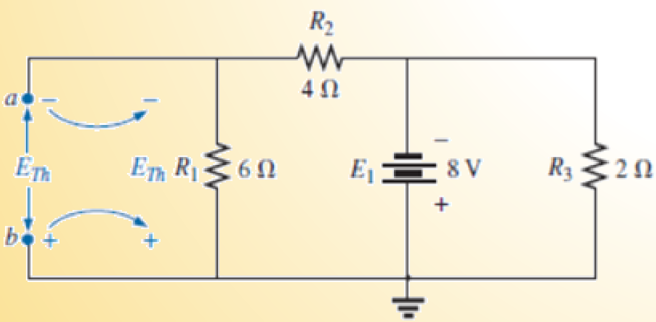


Εύρεση R_{Th}

$$R_{Th} = R_1 \| R_2 = \frac{(6\ \Omega)(4\ \Omega)}{6\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{24\ \Omega}{10} = 2.4\ \Omega$$

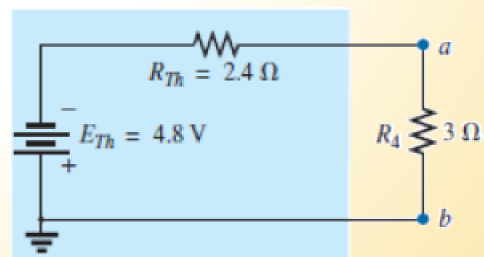


Εύρεση E_{Th}



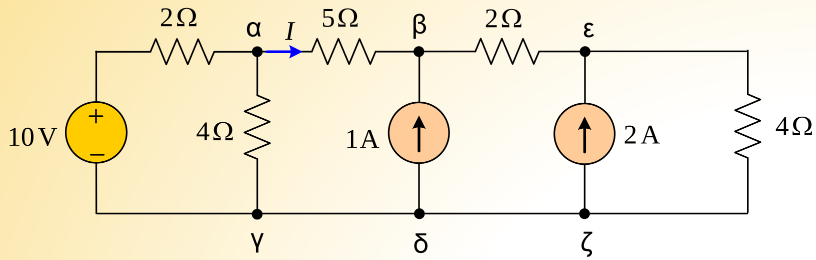
$$E_{Th} = \frac{R_1 E_1}{R_1 + R_2} = \frac{(6\ \Omega)(8\ \text{V})}{6\ \Omega + 4\ \Omega} = \frac{48\ \text{V}}{10} = 4.8\ \text{V}$$

Ισοδύναμο κύκλωμα



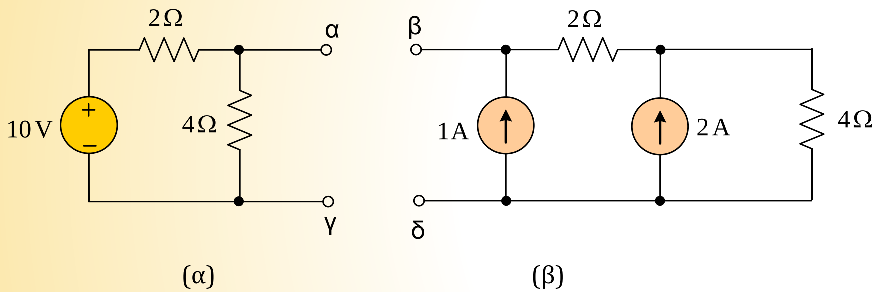
Ένα τρίτο παράδειγμα

Παράδειγμα 4.5 Με τη βοήθεια του θεωρήματος Thevenin να προσδιοριστεί το ρεύμα I στο κύκλωμα του Σχήματος 4.22.



Σχήμα 4.22

Λύση

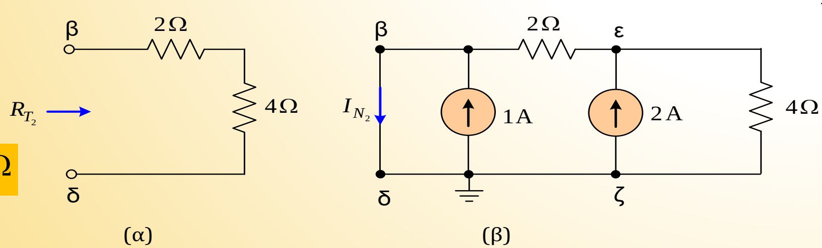


Σχήμα 4.23

$$R_{T_1} = \frac{2\cdot 4}{2+4} = \frac{4}{3}\Omega$$

$$V_{T_1} = V_{\alpha\gamma} = 10\frac{4}{2+4} = \frac{20}{3}\mathrm{V}$$

(β) Στο κύκλωμα του Σχήματος 4.23(β), αν μηδενίσουμε τις πηγές ρεύματος θα έχουμε το κύκλωμα του Σχήματος 4.24(α).



$$R_{T_2} = 6\Omega$$

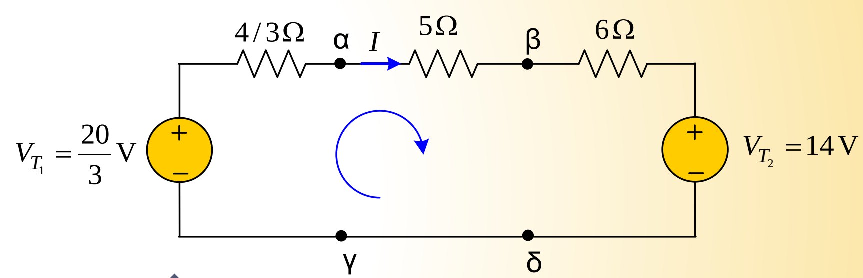
Σχήμα 4.24 (α) Κύκλωμα υπολογισμού της R_{T_2}. (β) Κύκλωμα υπολογισμού του I_{N_2}.

$$\frac{V_\varepsilon}{4} + \frac{V_\varepsilon}{2} = 2$$

$$V_\varepsilon = \frac{8}{3}\mathrm{V}$$

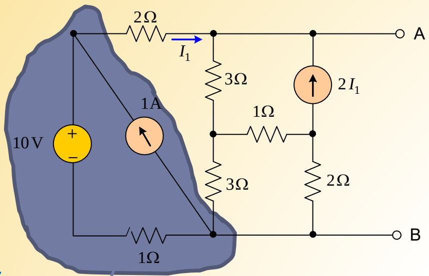
$$I_{N_2} = 1 + \frac{V_\varepsilon}{2} = \frac{7}{3}\mathrm{A}$$

$$V_{T_2} = I_{N_2} R_{T_2} = 14\,\mathrm{V}$$

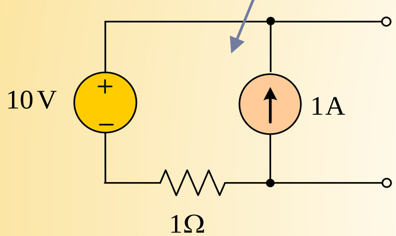


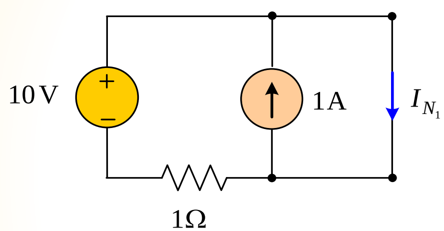
$$\left(\frac{4}{3}+5+6\right)I = \frac{20}{3} - 14 \quad \Rightarrow I = \frac{\frac{20}{3}-14}{\frac{4}{3}+5+6} = -\frac{22}{37}\mathrm{A}$$

Παράδειγμα Να ευρεθεί το ισοδύναμο κατά Thevenin από τα σημεία A και B.

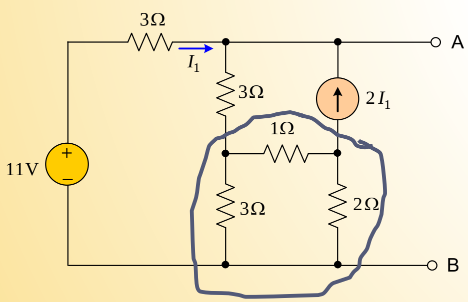


Λύση



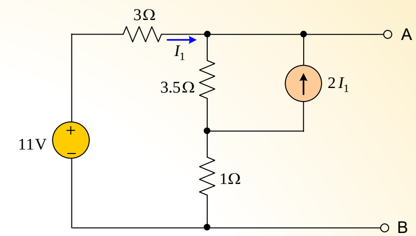


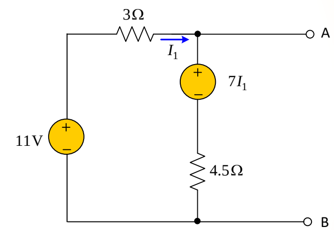
$R_{T_1} = 1\Omega$ $\quad V_{T_1} = \frac{11}{1} = 11\text{V}$ $\quad I_{N_1} = 11\text{ A}$

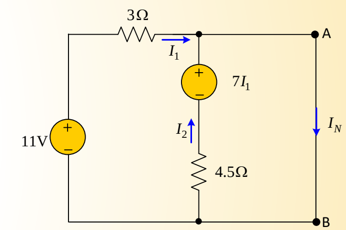


Μετασχηματίζουμε το τρίγωνο των αντιστάσεων 1Ω, 3Ω και 2Ω σε αστέρα, οπότε προκύπτουν αντιστάσεις

$$R_1 = \frac{1\cdot 3}{1+3+2} = \frac{3}{6}\Omega,\ \mathrm{R}_2 = \frac{1\cdot 2}{1+3+2}\Omega \quad \text{και} \quad R_3 = \frac{2\cdot 3}{1+3+2} = 1\Omega$$







$$7.5I_1 = 11 - 7I_1 \Rightarrow 14.5I_1 = 11 \Rightarrow I_1 = \frac{11}{14.5}\text{A}$$

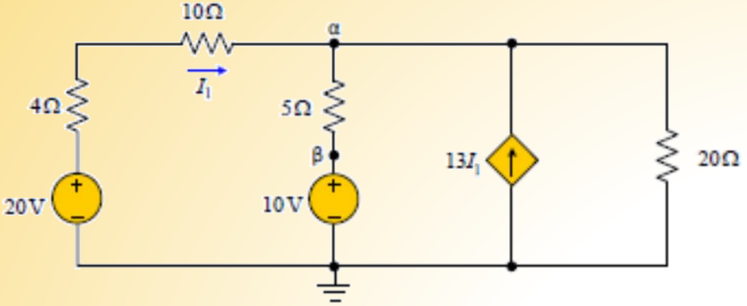
$$V_{AB} = V_T = 7I_1 + 4.5I_1 = 11.5I_1 \qquad \boxed{\Rightarrow V_T = \frac{1265}{145}\text{V}}$$

$$I_N = I_1 + I_2 = \frac{11}{3} + \frac{7}{4.5}\frac{11}{3} \qquad \boxed{\Rightarrow I_N = \frac{253}{27}\text{A}}$$

$$\boxed{R_T = \frac{V_T}{I_N} = 0.931\Omega}$$

Άσκηση 4.25

Βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin από τους ακροδέκτες a-b.

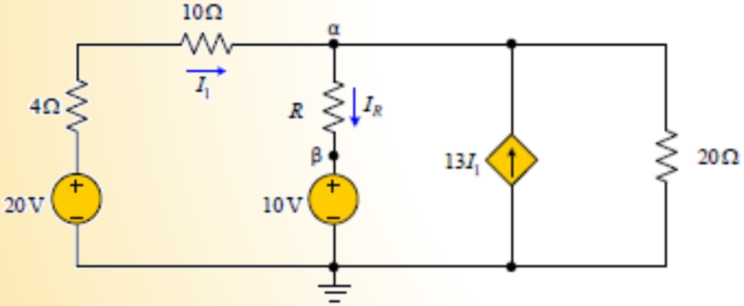


Σχήμα 1

Λύση

Το κύκλωμα περιέχει εξαρτημένη πηγή. Θεωρούμε ότι μεταξύ των ακροδεκτών α-β υπάρχει αντίσταση *R*. Από το κύκλωμα του Σχ. 2 έχουμε την ακόλουθη εξίσωση στον κόμβο α.

$$I_1 + 13I_1 = I_R + \frac{V_\alpha}{20}$$



Σχήμα 2

Όμως

$$I_1 = \frac{20 - V_\alpha}{14} \quad \text{και} \quad I_R = \frac{V_\alpha - 10}{R}$$

Συνεπώς

$$14\frac{20 - V_\alpha}{14} = \frac{V_\alpha - 10}{R} + \frac{V_\alpha}{20}$$

$$\Rightarrow V_\alpha = \frac{200 + 400R}{20 + 21R}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η τάση V_T είναι ίση με

$$V_T = V_\alpha\big|_{R=5\Omega} - V_\beta = 17.6\,\text{V} - 10\,\text{V} = 7.6\,\text{V}$$

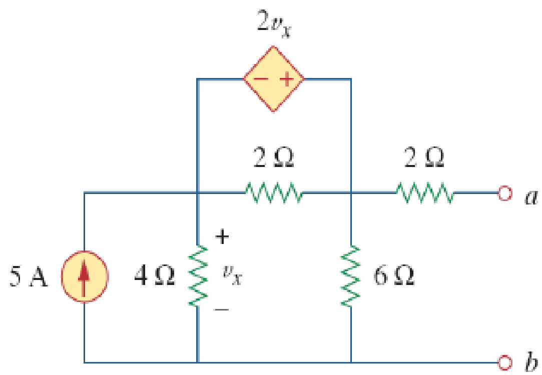
Το ρεύμα βραχυκύκλωσης βρίσκεται ως εξής

$$I_N = \lim_{R \to 0} \frac{V_\alpha - 10}{R} = \lim_{R \to 0} \frac{190}{21R + 20} = 9.5\,\text{A}$$

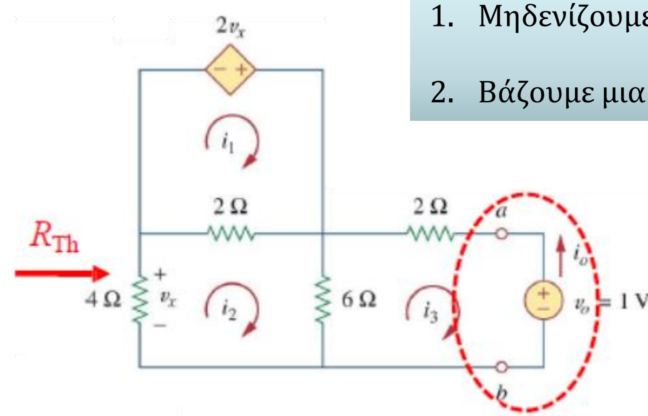
Έτσι, η R_T είναι ίση με

$$R_T = \frac{V_T}{I_N} = \frac{7.6}{9.5} = 0.8\Omega$$

Παράδειγμα Εύρεσης ισοδύναμου με εξαρτημένες πηγές

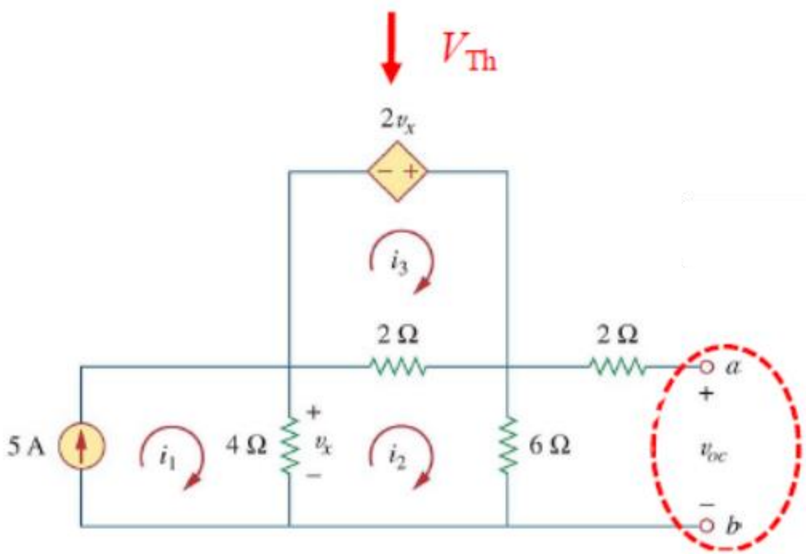


1. Μηδενίζουμε τις ανεξάρτητες πηγές
2. Βάζουμε μια πηγή τάσης 1 V στην έξοδο



$i_o = -i_3 = 1/6$ A.

$$\boxed{R_{Th} = \frac{1\ \text{V}}{i_o} = 6\ \Omega}$$



$$2(i_1 - i_2) = 2v_x \Rightarrow (i_1 - i_2) = v_x$$

Όμως $v_x = -4i_2 = i_1 - i_2 \Rightarrow i_1 = -3i_2$

$$12i_2 - 2i_1 - 6i_3 = 0 \Rightarrow 18i_2 - 6i_3 = 0$$

$$8i_3 - 6i_2 = -1 \Rightarrow 8i_3 - 2i_3 = -1$$

$$\Rightarrow i_3 = -\frac{1}{6}\text{A}$$

$i_1 = 5$ A

$$12i_2 - 4i_1 - 2i_3 = 0 \Rightarrow 12i_2 - 2i_3 = 20$$

$2i_3 - 2i_2 = 2v_x \Rightarrow 2i_3 - 2i_2 = 8(5 - i_2) \Rightarrow 6i_2 + 2i_3 = 40$

$i_2 = \frac{10}{3}$ A

$v_T = v_{oc} = 6i_2 = 20$ V

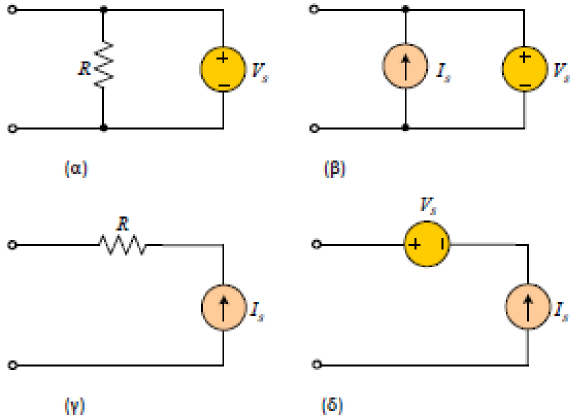
Μετασχηματισμός Πηγών

Μια διαδικασία που διευκολύνει τον υπολογισμό Ισοδυνάμων Κυκλωμάτων είναι ο ***Μετασχηματισμός Πηγών***.

Μετασχηματισμός Πηγών = Πηγές Τάσης/Ρεύματος γίνονται Πηγές Ρεύματος/Τάσης προς διευκόλυνση της ανάλυσης.

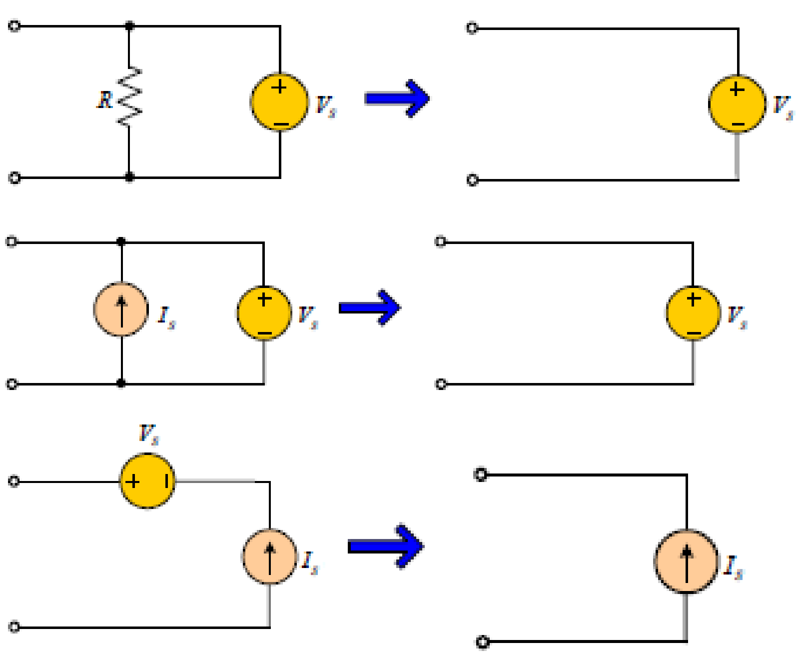
Άσκηση 4.8

Ποια είναι τα ισοδύναμα κατά Thevenin δίπολα των κυκλωμάτων του Σχ. 1;

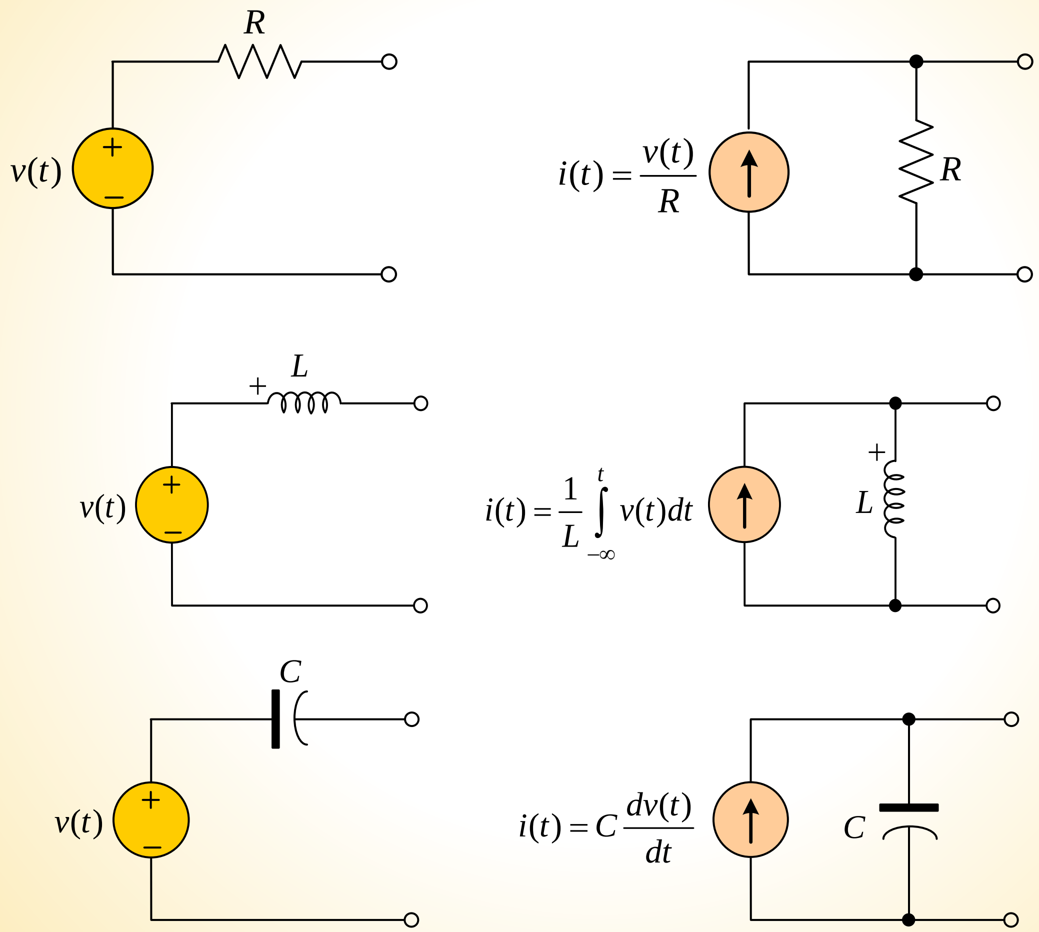


Σχήμα 1

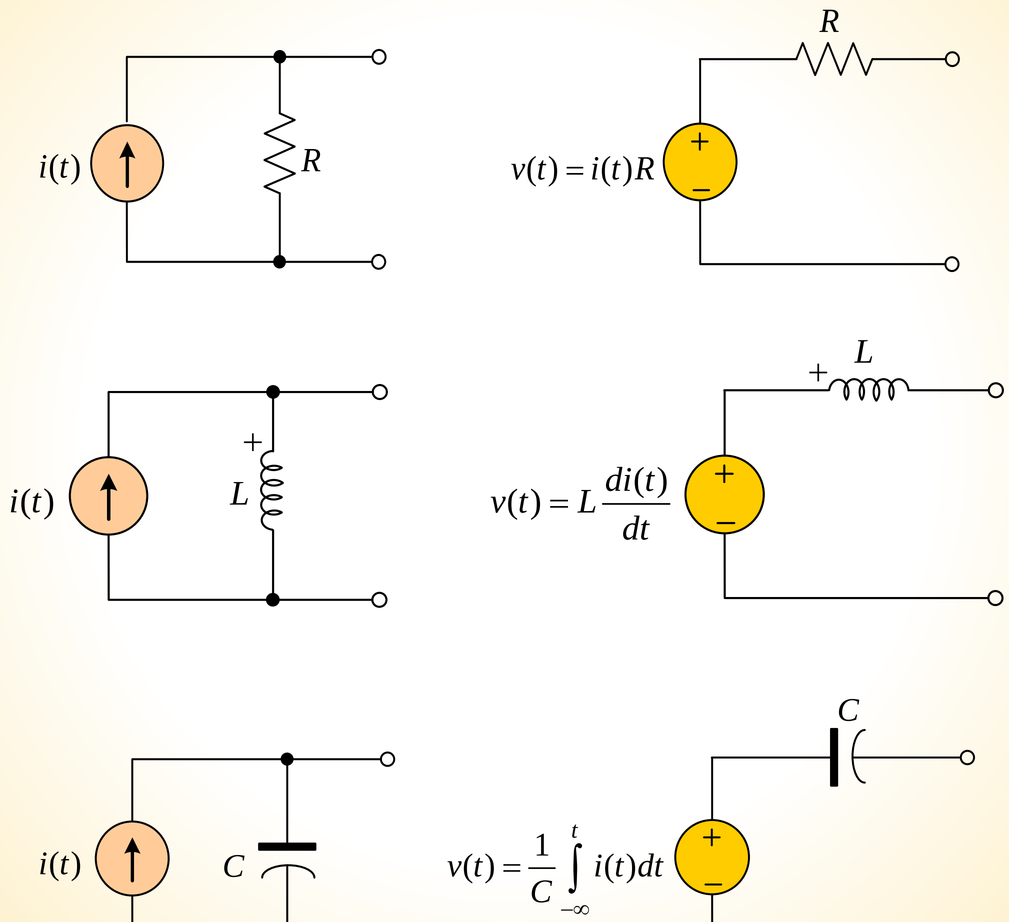
Λύση



Μετασχηματισμός Πηγών Τάσεων

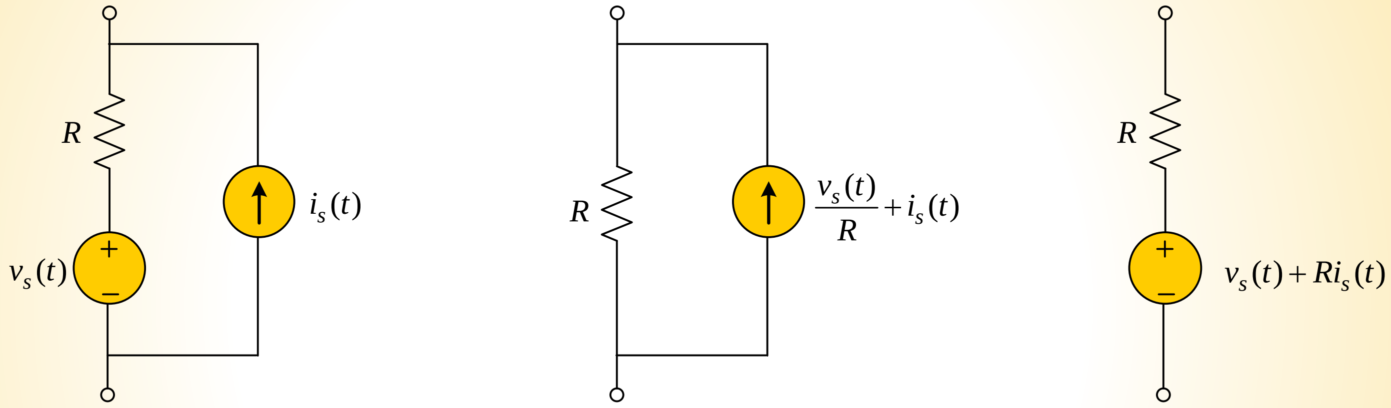


Μετασχηματισμός Πηγών Ρευμάτων



Μετασχηματισμός Πηγών

Μια γενική περίπτωση:



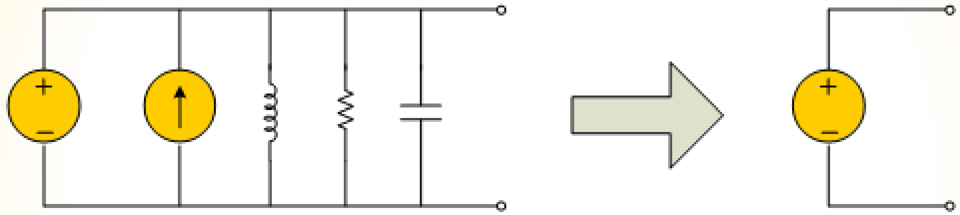
• Αν $R = 0$, τότε το ισοδύναμο *Thevenin* πηγής τάσης || πηγή ρεύματος = πηγή τάσης.

• Αν $R \to \infty$, τότε το ισοδύναμο είναι η πηγή ρεύματος.

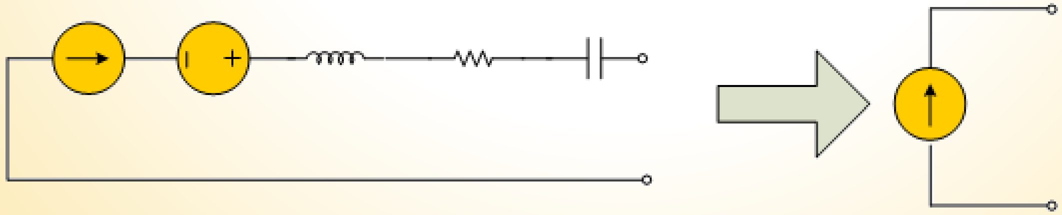
Μετασχηματισμός Πηγών

Γενικός Κανόνας

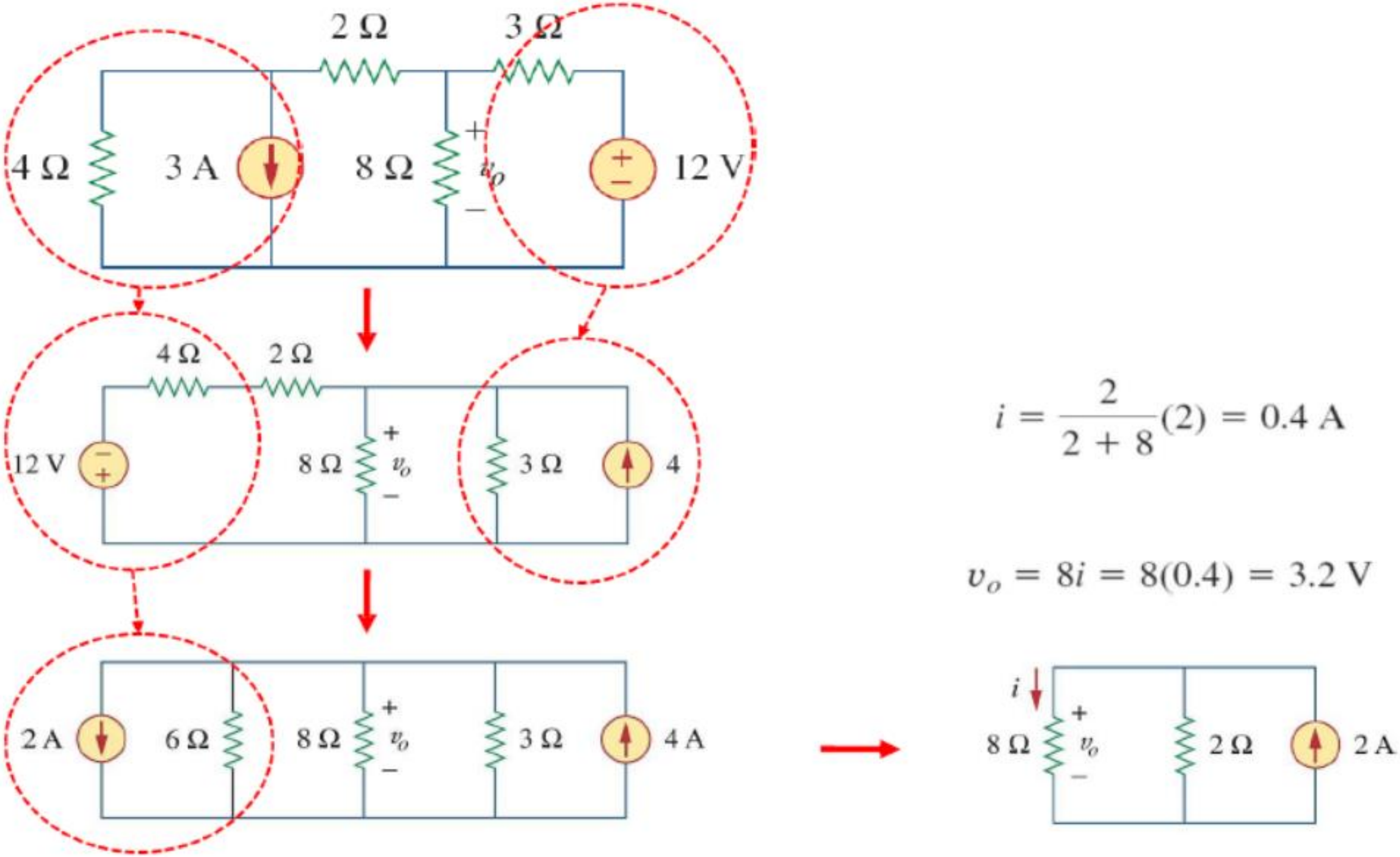
- Πηγή Τάσης || (Πηγή Ρεύματος ή Αντίσταση ή Πυκνωτή ή Πηνίο) έχει ισοδύναμο Thevenin την Πηγή Τάσης.



- Πηγή Ρεύματος **σε σειρά** με (Πηγή Τάσης ή Αντίσταση ή Πυκνωτή ή Πηνίο) έχει ισοδύναμο Norton την Πηγή Ρεύματος.



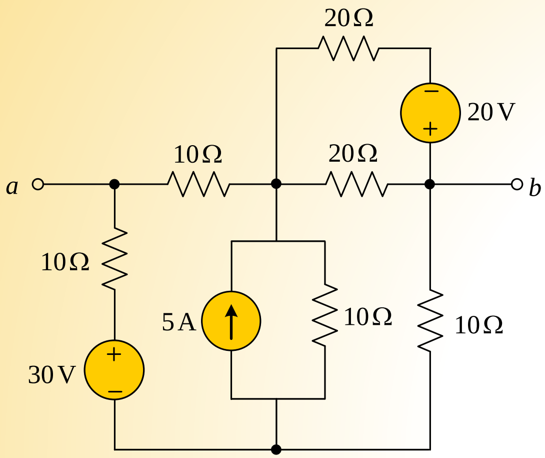
Παράδειγμα: Να βρεθεί η τάση v_o με χρήση μετασχηματισμού πηγών



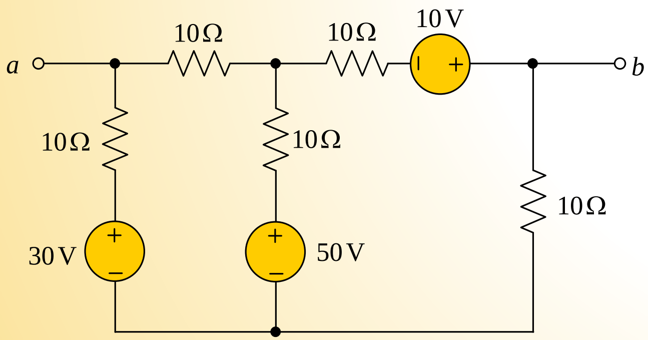
$$i = \frac{2}{2+8}(2) = 0.4 \text{ A}$$

$$v_o = 8i = 8(0.4) = 3.2 \text{ V}$$

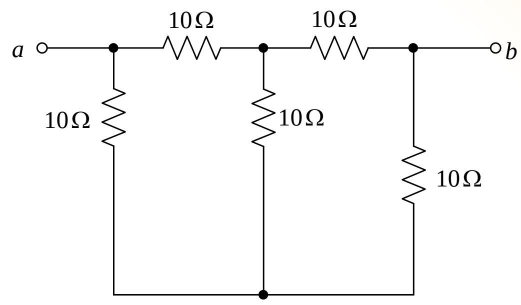
Παράδειγμα: Να βρεθεί το ισοδύναμο Thevenin από τα σημεία a-b.

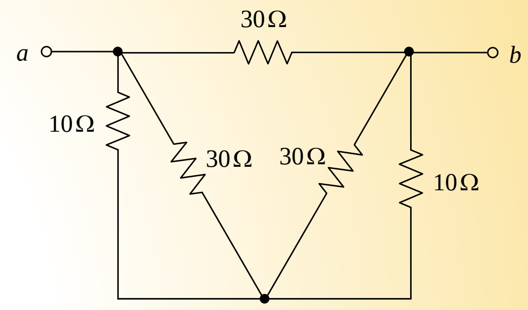


Λύση



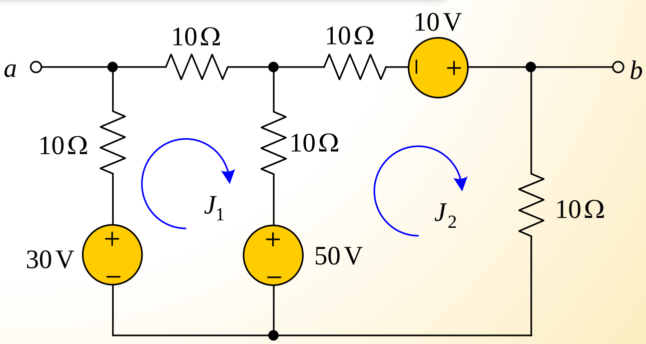
Υπολογισμός R_T





$$R_T = 30//(10//30+10//30) = 30//(7.5+7.5) = 10\Omega$$

Υπολογισμός V_T



$$30J_1 - 10J_2 = -20$$

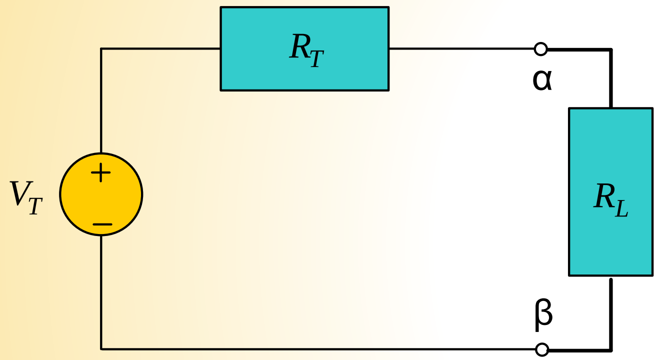
$$-10J_1 + 30J_2 = 60$$

$$J_1 = 0\,\text{A} \qquad J_2 = 2\,\text{A}$$

$$V_T = V_{ab} = 10J_1 + 10J_2 - 10 = 10\,\text{V}$$

Μέγιστη Μεταφορά Ισχύος στο Φορτίο

«*Για να έχω* ***μέγιστη μεταφοράς ισχύος*** *στο φορτίο R_L, πρέπει το φορτίο R_L να είναι ίσο με R_T*»



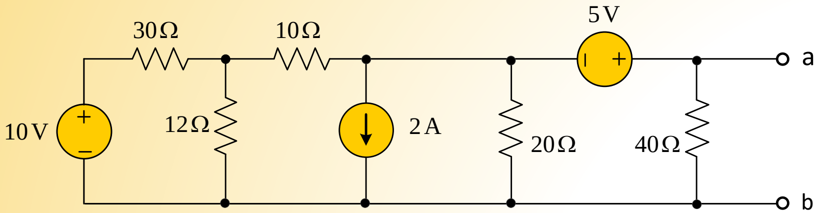
Η ισχύς στην R_L είναι:

$$P_{R_L} = \frac{V_{\alpha\beta}^2}{R_L} = \frac{1}{R_L}\frac{V_T^2 R_L^2}{(R_L + R_T)^2} = \frac{V_T^2 R_L}{(R_L + R_T)^2}$$

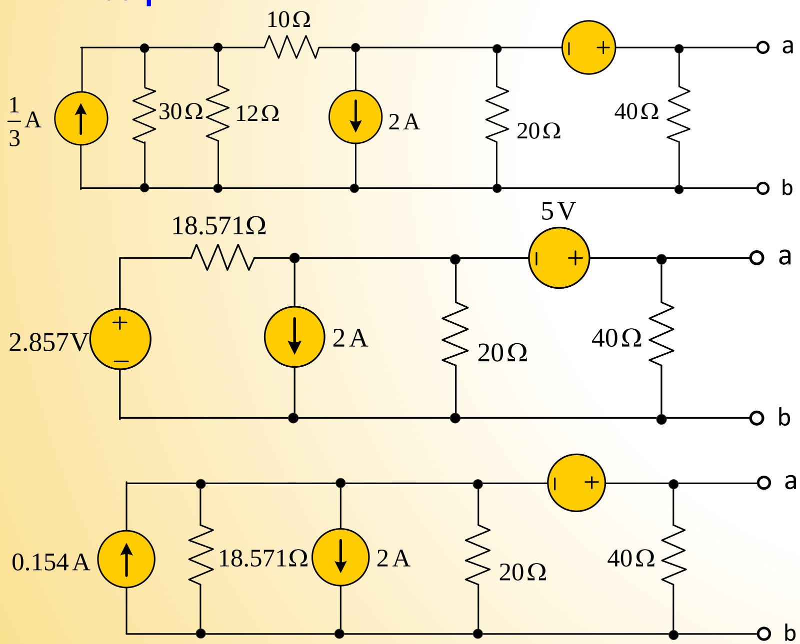
Για να έχω μέγιστη ισχύ στην R_L, πρέπει να βρω R_L τέτοια ώστε $dP_{RL}/dR_L=0$

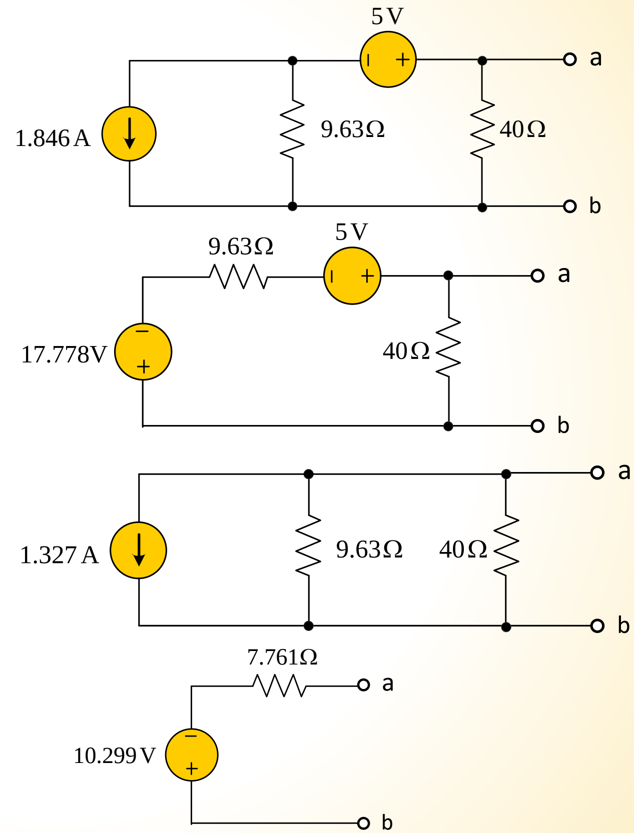
$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = V_T^2 \frac{(R_L + R_T)^2 - 2R_L(R_L + R_T)}{(R_L + R_T)^4} = V_T^2 \frac{R_L + R_T - 2R_L}{(R_L + R_T)^3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_L = R_T}$$

Παράδειγμα: Προσδιορίστε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin από τους ακροδέκτες ab. Στη συνέχεια, υπολογίστε την μέγιστη ισχύ που παρέχεται από τη γεννήτρια σε ένα φορτίο R_L που είναι συνδεδεμένο στους ακροδέκτες ab.



Λύση





Για μέγιστη ισχύ πρέπει $R_L = R_T = 7.761\ \Omega$. Στην περίπτωση αυτή η ισχύς είναι ίση με

$$P_{\max} = \frac{|V_T|^2}{4R_L} = 3.416\,\mathrm{W}$$

Διαχωρισμός Πηγών

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο Μετασχηματισμός Πηγών δεν απλοποιεί το κύκλωμα.

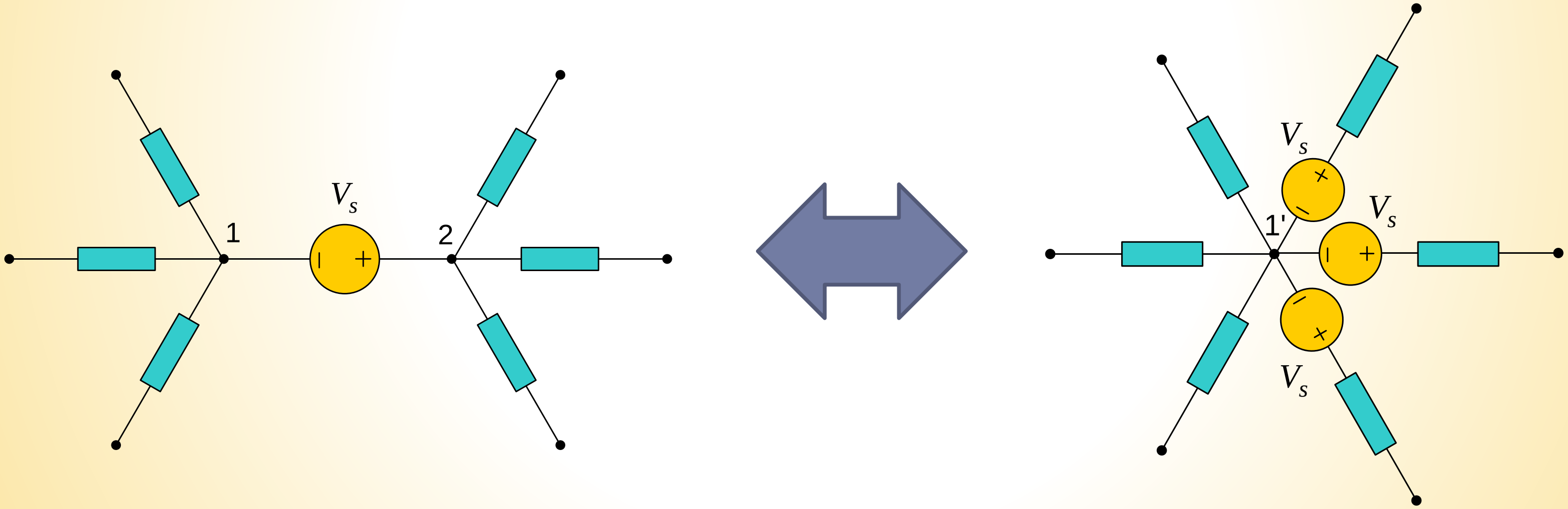
Καταφεύγουμε στο Διαχωρισμό Πηγών.

Διαχωρισμός Πηγών

- Πηγές Τάσης σε σειρά με στοιχεία.
- Πηγές Ρεύματος παράλληλα με στοιχεία.

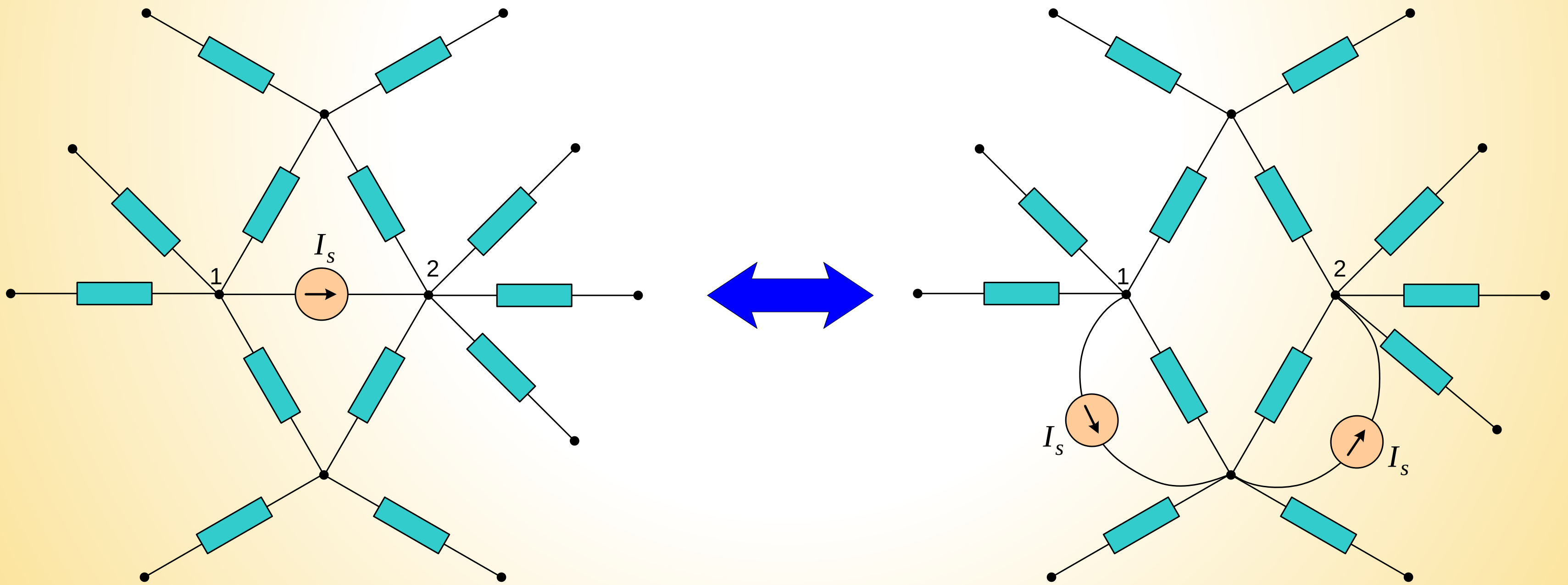
Διαχωρισμός Πηγής Τάσης

Η πηγή τάσης μεταφέρεται στους γειτονικούς κλάδους <u>σε σειρά</u> με τα στοιχεία.

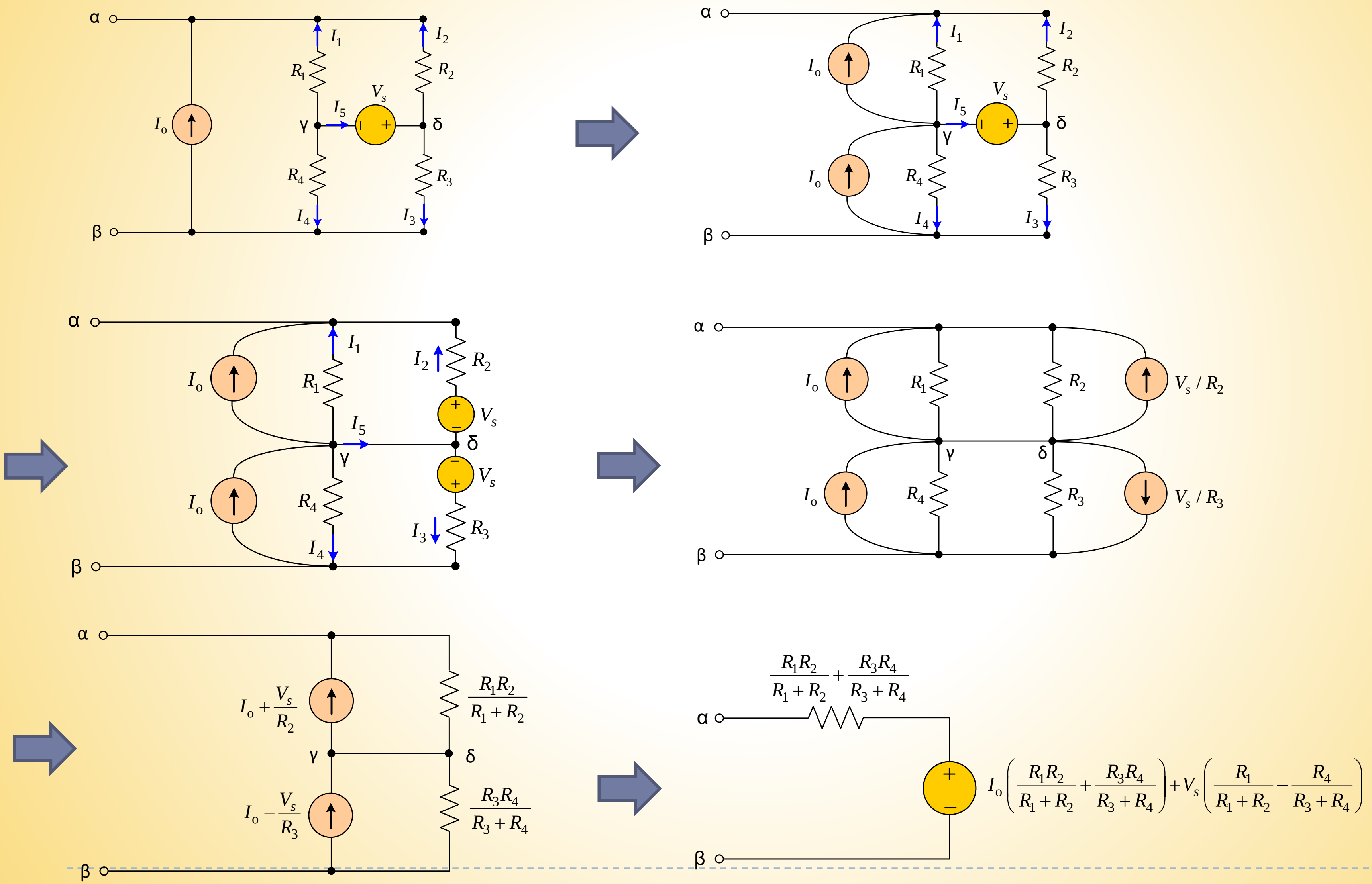


Διαχωρισμός Πηγής Ρεύματος

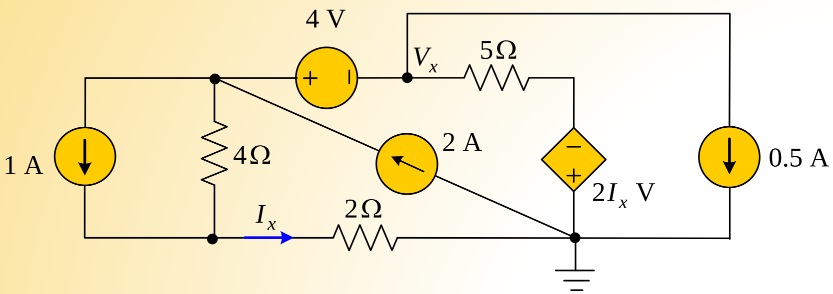
Η πηγή ρεύματος μεταφέρεται στους γειτονικούς κλάδους <u>παράλληλα</u> με τα στοιχεία.

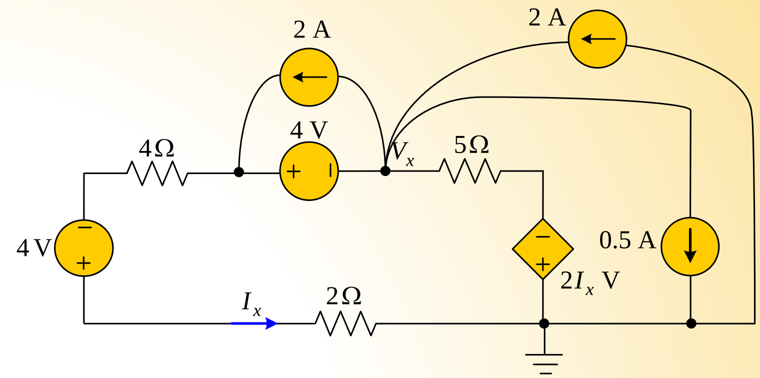


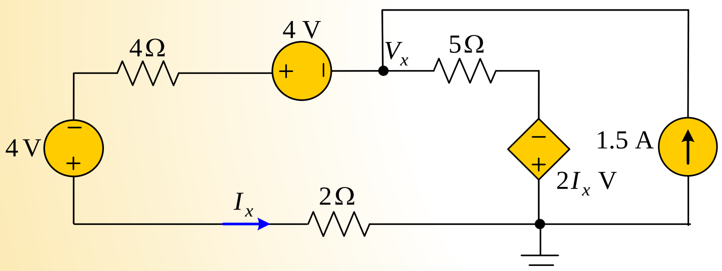
Παράδειγμα 1: Να βρεθεί το ισοδύναμο Thevenin από τα α -β

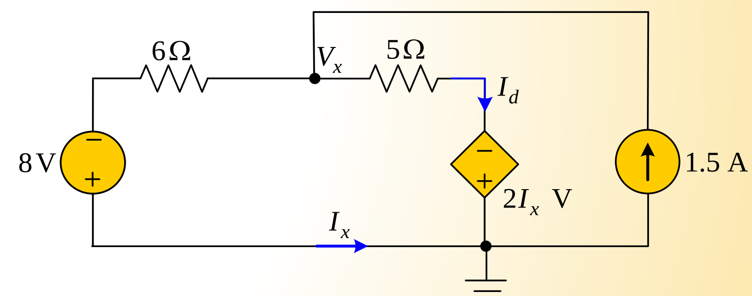


Παράδειγμα 2: (α) Να βρεθεί το ρεύμα I_x και η τάση V_x. (β) Να εξετασθεί αν η εξαρτημένη πηγή τάσης αποδίδει ή απορροφά ισχύ.









$$\left.\begin{aligned} &\frac{V_x+8}{6}+\frac{V_x+2I_x}{5}=1.5 \\ &\frac{V_x+8}{6}=I_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &V_x=-0.846\,\text{V} \\ &I_x=1.192\,\text{A} \end{aligned}\right.$$

(β)

$$I_d=\frac{V_x+2I_x}{5}=0.308\,\text{A}$$

$$P_{2I_x}=(-2I_x)I_d=-0.733\,\text{W}$$

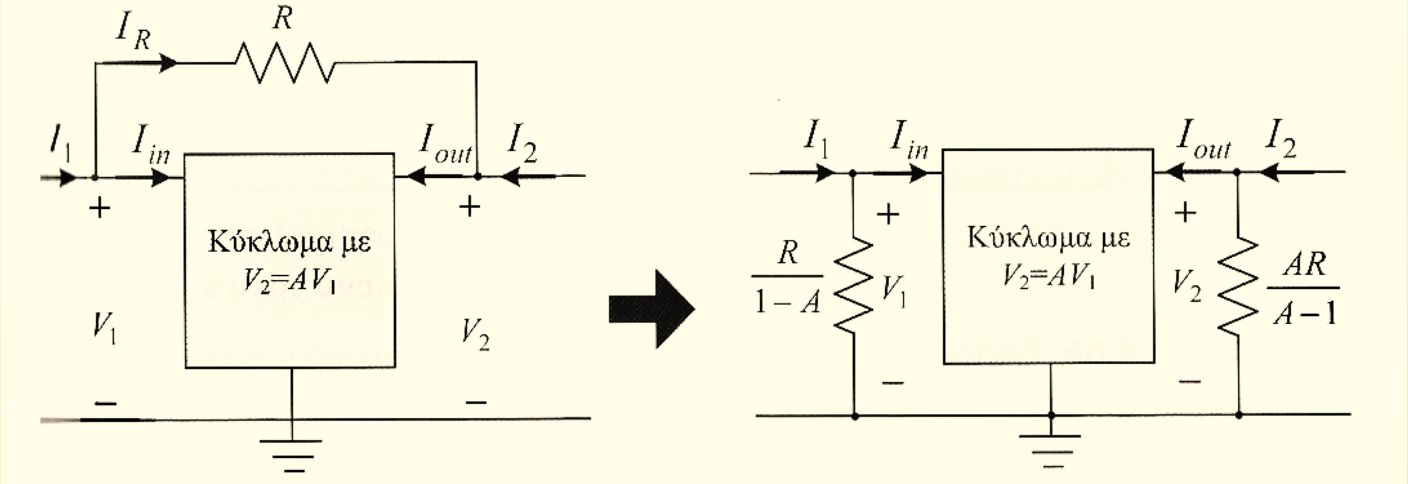
Θεώρημα Miller

«Αν κλάδος που περιέχει ωμική αντίσταση R συνδέει δύο κόμβους με τάσεις V_1, V_2 τότε ο κλάδος αυτός μπορεί να αντικατασταθεί με 2 αντιστάσεις R_1, R_2 παράλληλα στις V_1, V_2 αντίστοιχα»

$$R_1 = \frac{RV_1}{V_1 - V_2} = \frac{R}{1 - A}$$

$$R_2 = \frac{RV_2}{V_2 - V_1} = \frac{AR}{A - 1}$$

$$A = \frac{V_2}{V_1}$$



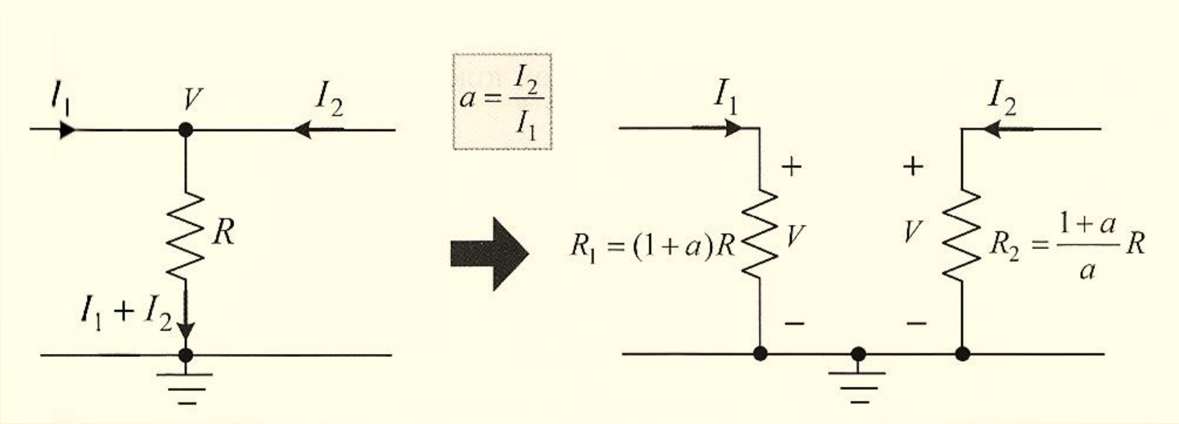
Δυικό Θεώρημα Miller

«Αν τα ρεύματα 2 κλάδων I_1 και I_2 καταλήγουν σε κλάδο, που συνδέεται με ωμική αντίσταση R με τη γείωση, ο κλάδος αυτός μπορεί να αντικατασταθεί με 2 αντιστάσεις R_1, R_2»

$$R_1 = (1+a)R$$

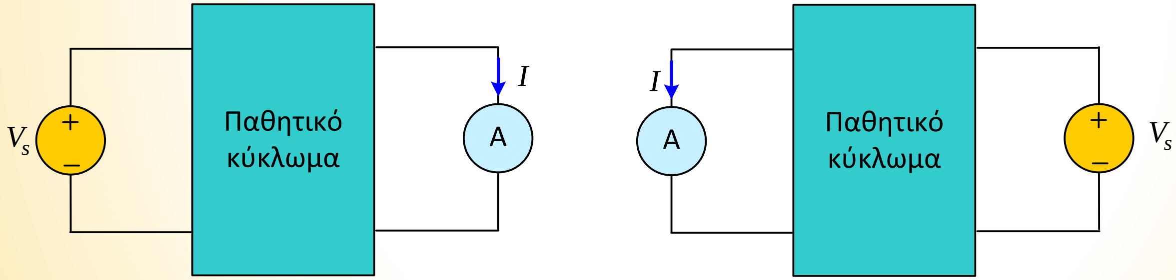
$$R_2 = \frac{1+a}{a}R$$

$$a = \frac{I_2}{I_1}$$



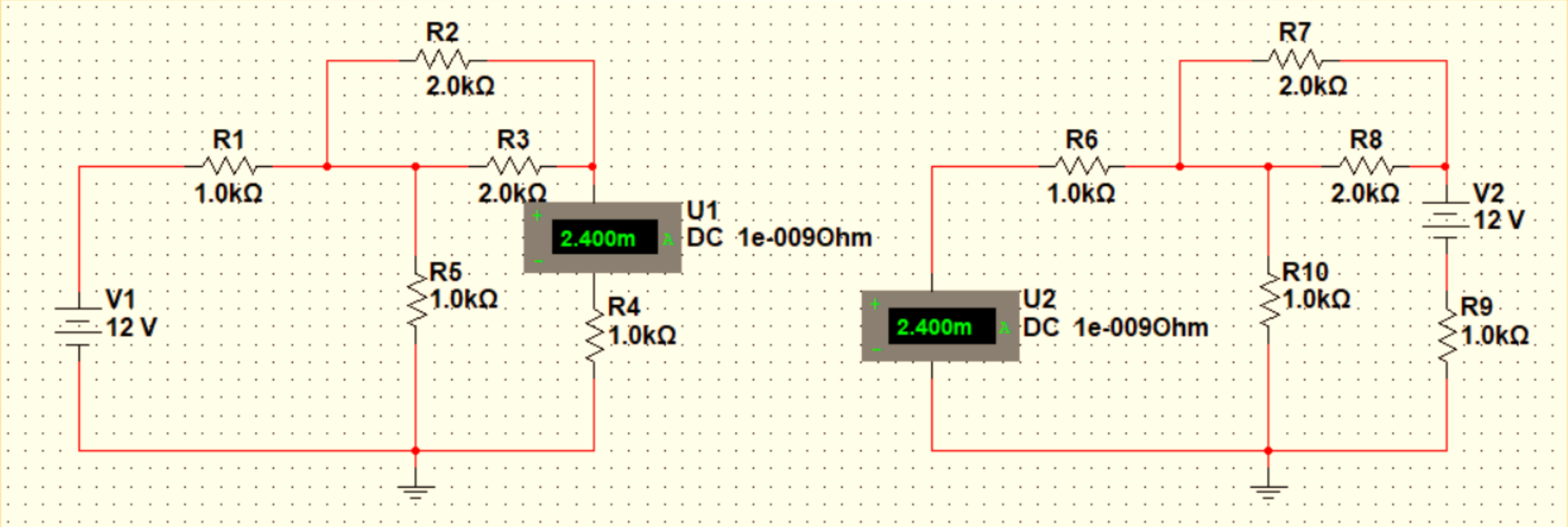
Θεώρημα Αμοιβαιότητας

- Το θεώρημα της αμοιβαιότητας (reciprocal theorem) εφαρμόζεται μόνο σε παθητικά κυκλώματα τα οποία περιέχουν μόνο μια ανεξάρτητη πηγή και καμία εξαρτημένη πηγή. Δηλαδή, το θεώρημα αυτό δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε κυκλώματα με ενεργά στοιχεία καθώς και σε κυκλώματα με περισσότερες από μία πηγές. Με αυτές τις προϋποθέσεις το θεώρημα της αμοιβαιότητας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
- “Το ρεύμα σε οποιοδήποτε κλάδο ενός κυκλώματος, το οποίο οφείλεται σε μια μοναδική πηγή τάσης που είναι συνδεδεμένη οπουδήποτε αλλού στο κύκλωμα, είναι ίσο με το ρεύμα του κλάδου στον οποίο αρχικά ήταν συνδεδεμένη η πηγή τάσης αν η πηγή τάσης αλλάξει θέση και συνδεθεί στον κλάδο που αρχικά θέλαμε να μετρήσουμε το ρεύμα”.



- Η πηγή τάσης αντικαθίσταται από ένα βραχυκύκλωμα στην αρχική θέση.
- Η πολικότητα της πηγής στη νέα θέση πρέπει είναι τέτοια ώστε το ρεύμα στον κλάδο να έχει την αρχική κατεύθυνση.

Θεώρημα Αμοιβαιότητας



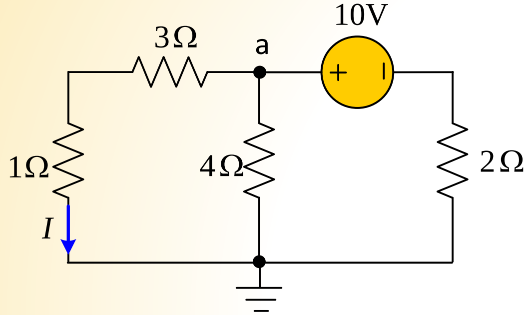
Η αρχή της αμοιβαιότητας ισχύει και στην περίπτωση που η διέγερση είναι μια πηγή ρεύματος και η παρατηρούμενη απόκριση είναι μια τάση. Δεν ισχύει όμως γενικά όταν έχουμε ως διέγερση μια πηγή τάσης και απόκριση τάση ή διέγερση μια πηγή ρεύματος και απόκριση ρεύμα.

Στην περίπτωση που έχουμε διέγερση από πηγή ρεύματος τότε πρέπει:

- Η πηγή ρεύματος να αντικαθίσταται από ένα ανοικτό κύκλωμα στην αρχική θέση της πηγής ρεύματος.
- Η φορά της πηγής στη νέα θέση πρέπει να είναι τέτοια ώστε η πολικότητα της τάσης του κόμβου στον οποίο η πηγή ρεύματος συνδέεται να παραμένει αμετάβλητη.

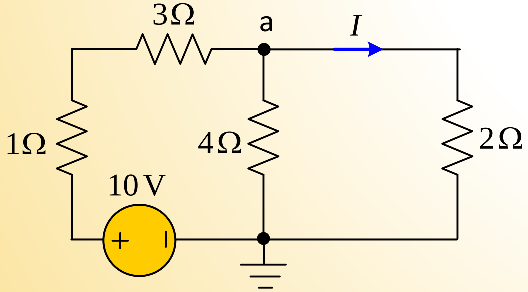
Θεώρημα Αμοιβαιότητας: Παράδειγμα 1

- Στο κύκλωμα υπολογίστε το ρεύμα *I* με την χρησιμοποίηση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας.



Λύση

$$\frac{V_a}{3+1}+\frac{V_a}{4}+\frac{V_a-10}{2}=0 \Rightarrow V_a=5\,\text{V} \Rightarrow I=\frac{V_a}{4}=\frac{5}{4}\,\text{A}$$

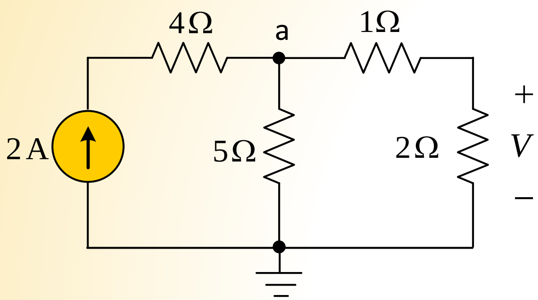


$$\frac{V_a-10}{3+1}+\frac{V_a}{4}+\frac{V_a}{2}=0 \Rightarrow V_a=2.5\,\text{V}$$

$$\Rightarrow I=\frac{V_a}{2}=\frac{2.5}{2}=\frac{5}{4}\,\text{A}$$

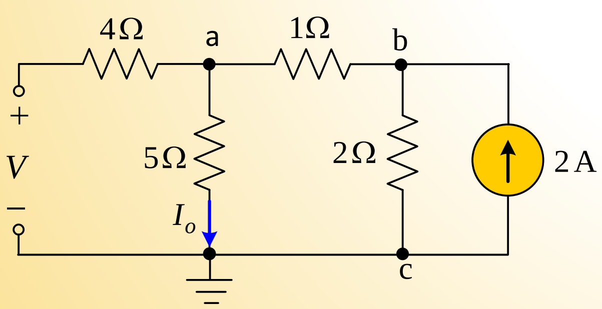
Θεώρημα Αμοιβαιότητας: Παράδειγμα 2

- Στο κύκλωμα υπολογίστε τη τάση V με τη χρησιμοποίηση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας.



Λύση

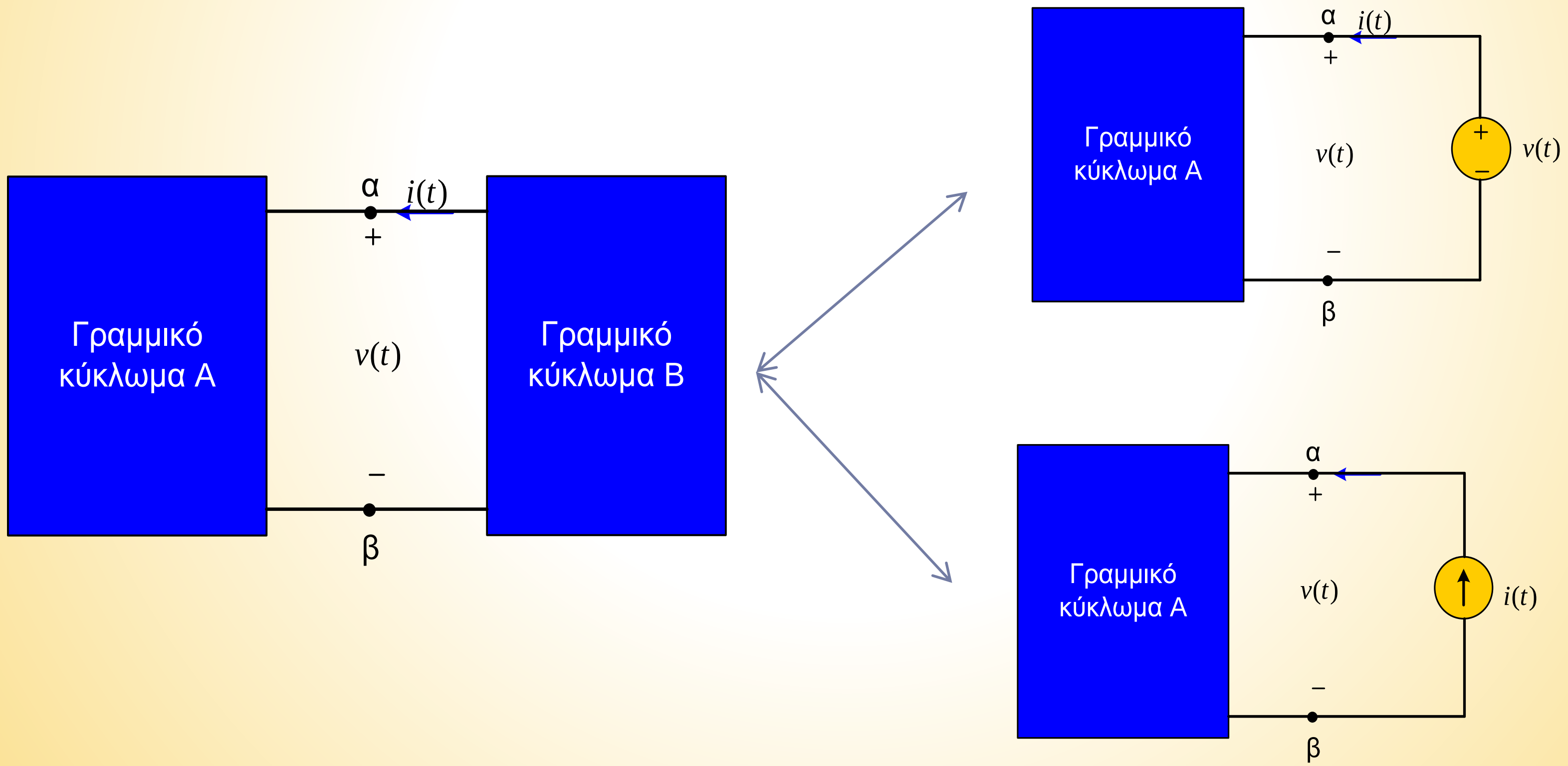
$$\frac{V_a}{5}+\frac{V_a}{3}=2 \Rightarrow V_a=\frac{15}{4}\mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad V=V_a\frac{2}{1+2}=\frac{15}{4}\frac{2}{3}=2.5\mathrm{V}$$



$$I_o=2\frac{2}{5+1+2}=\frac{1}{2}\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad V=5I_o=2.5\mathrm{V}$$

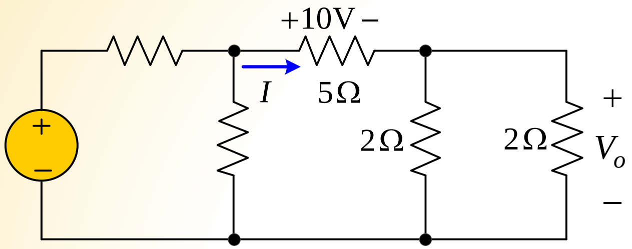
Θεώρημα Αντικατάστασης

«Ένα τμήμα του κυκλώματος μπορεί να αντικατασταθεί με μια πηγή τάσης ή ρεύματος, έτσι ώστε η τάση στα άκρα ή το ρεύμα που το διαρρέει να παραμένουν ίδια»



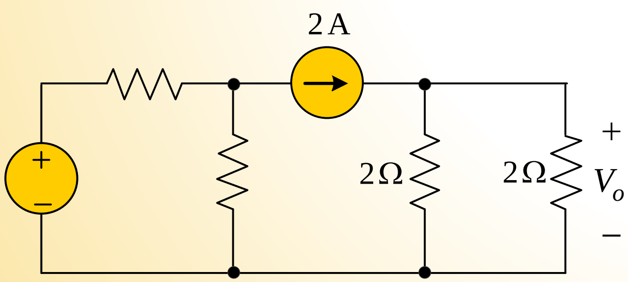
Θεώρημα Αντικατάστασης: Παράδειγμα

- Στο κύκλωμα υπολογίστε την τάση V_o.



Λύση

$$I = \frac{10}{5} = 2\,\text{A}$$



$$V_o = 2\Omega \times 1\text{A} = 2\text{V}$$