Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 5

Κυκλώματα Δεύτερης Τάξης

του Νικολάου Παπαμάρκου

Με βάση το βιβλίο Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Τόμος ΑΒ

Δευτεροτάξια Κυκλώματα

Δευτεροτάξια Κυκλώματα = έχουν 2 στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας.

Καταλήγουν σε 2^{ου} βαθμού ΔΕ.

Πιο δύσκολα εν γένει από τα κυκλώματα πρώτης τάξης.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

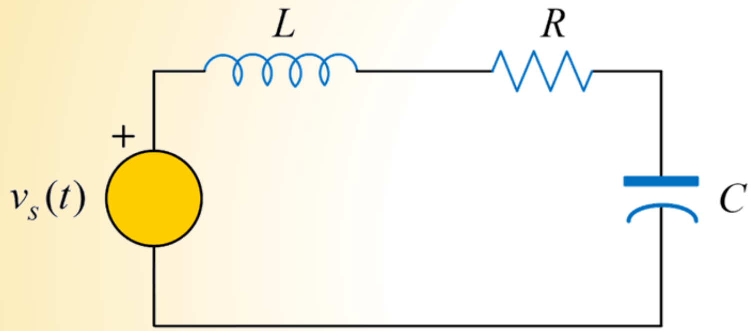
Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

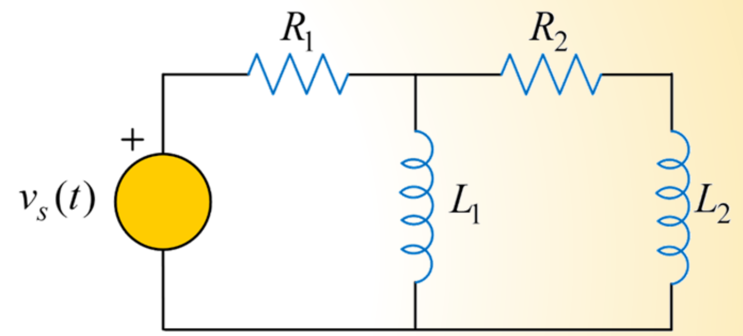
Ταυτόσημες με τα πρωτοτάξια

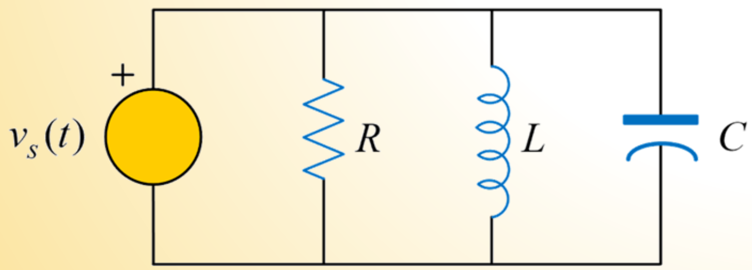
Για εύρεση της Ολικής Απόκρισης => Ίδια Μεθοδολογία με Πρωτοτάξια

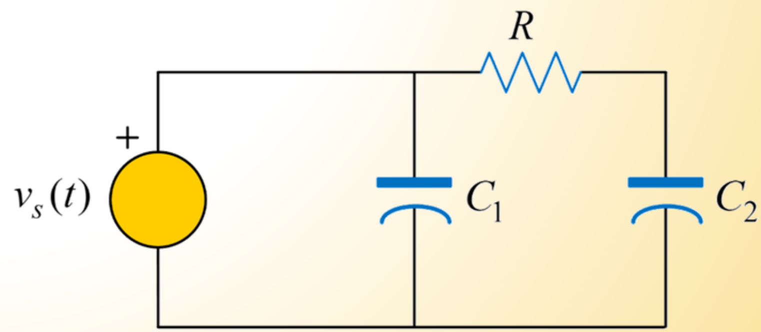
Κύριες Μεταβλητές → Τάσεις Πυκνωτών, Ρεύματα Πηνίων

- Τυπικά κυκλώματα δεύτερης τάξης









Δευτεροτάξια Κυκλώματα

Καταλήγουν σε

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1\frac{dy}{dt} + p_2 y(t) = g(t)$$

Συνάρτηση Διέγερσης Κυκλώματος

Απόκριση

$$p_1, p_2 \in \Re$$

Λύση Ομογενούς

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1\frac{dy}{dt} + p_2 y(t) = 0$$

- p_1 και p_2 πραγματικές σταθερές
- $g(t)$ συνάρτηση του t που εξαρτάται από τις διεγέρσεις του κυκλώματος
- $y(t)$ η απόκριση του κυκλώματος

Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$s^2 + p_1 s + p_2 = 0$$

Ρίζες *ή*

Φυσικές Συχνότητες *ή*

Ιδιοσυχνότητες

$$s_{1,2} = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}$$

Δευτεροτάξια Κυκλώματα

Περιπτώσεις:

α) $s_1 \neq s_2, \quad s_1, s_2 \in \Re$ $\qquad y_0(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

β) $s_1 = s_2 = s, \quad s \in \Re$ $\qquad y_0(t) = (K_1 + K_2 t) e^{st}$

γ) $s_1, s_2 \in Z, \quad s_1 = s_2^*$ $\qquad y_0(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_1^* t}$

Έστω $\quad s_1 = -\alpha + j\beta \Rightarrow s_2 = s_1^* = -\alpha - j\beta$

$$y_0(t) = e^{-at}[K_1 e^{j\beta t} + K_2 e^{-j\beta t}]$$

$$= e^{-at}[(K_1 + K_2)\cos\beta t + j(K_1 - K_2)\cos\beta t]$$

Αν $K_1 = \frac{1}{2} \mathrm{K}\, e^{j\phi}, K_2 = \frac{1}{2} \mathrm{K}\, e^{-j\phi}$ τότε

$$y_0(t) = e^{-at} K \cos(\beta t + \varphi) = e^{-at}\left[K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)\right]$$

δ) $s_1, s_2 \in Z, \quad s_1 = s_2^*, \quad s_1 = j\beta$ $\qquad y_0(t) = K \cos(\beta t + \varphi)$

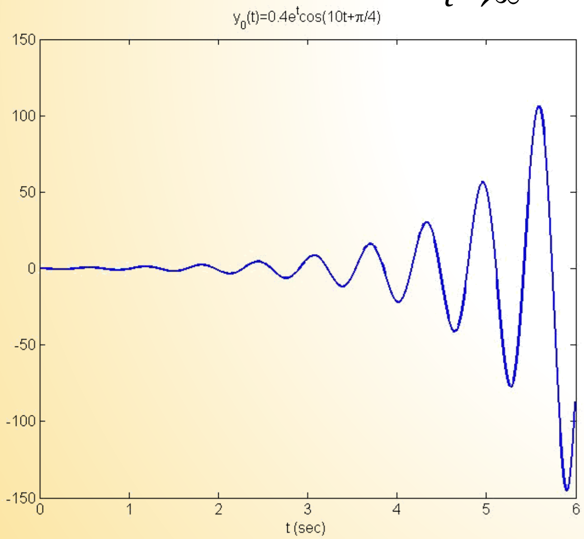
Δευτεροτάξια Κυκλώματα

γ) $$y_0(t) = e^{-at} K \cos(\beta t + \phi)$$

Αν $a > 0$ $\qquad \lim_{t\to\infty} y_0(t) = 0$

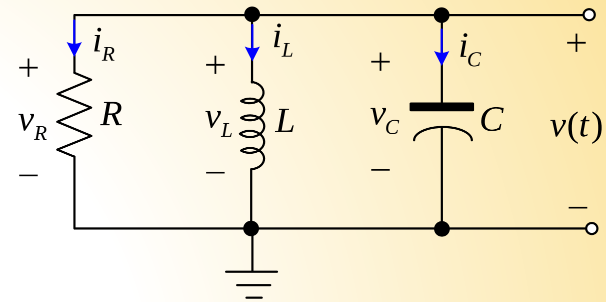
Αν $a < 0$ $\qquad \lim_{t\to\infty} y_0(t) = \infty$ Ασταθής Κατάσταση

$$y_0(t) = 0.4 e^{t} \cos(10t + 45^o)$$



Πρέπει πάντα το $Re\{s\}$<0

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου Παράλληλου RLC



Απόκριση όταν οι είσοδοι μηδενίζονται:

Αρχικές Συνθήκες: $v_C(0^-) = V_0, \quad i_L(0^-) = I_0$

Ισχύει: $v_C(t) = v_L(t) = v_R(t) = v(t)$

$$i_R = \frac{v}{R} \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{dv}{dt} \qquad v_L = v = L\frac{di_L}{dt}$$

NPK: $i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = 0$

$$\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + i_L = 0 \qquad \Rightarrow \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου Παράλληλου RLC

Χαρακτηριστική της εξίσωση

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Ρίζες

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$$

Αν

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC}$$

τότε

$$\frac{d^2v}{dt} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου Παράλληλου RLC

Περιπτώσεις

1) $a > \omega_0$ $\quad s_{1,2} \in \Re^-$ $\quad v(t) = \underbrace{K_1 e^{s_1 t} + K_2}_{} e^{s_2 t}$

Από αρχικές συνθήκες

2) $a = \omega_0 > 0$ $\quad s_1 = s_2 = -a < 0$ $\quad v(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-at}$

Κρίσιμη Απόσβεση

3) $a < \omega_0, a \geq 0$ $\quad s_{1,2} = -a \pm j\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega_d}$

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$
$$= K e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

Υποαποσβεσμένη Απόκριση

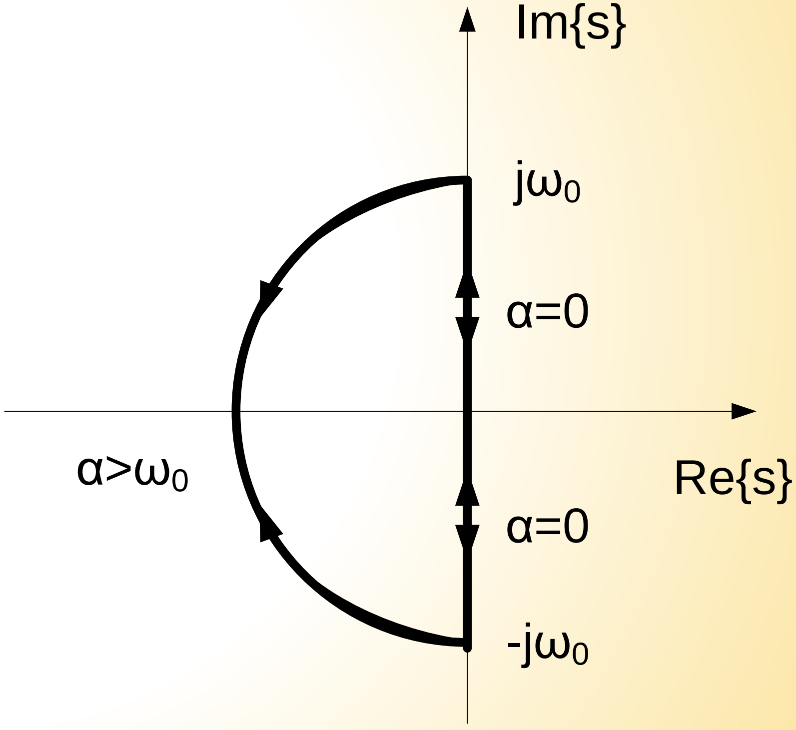
4) $a = 0$ $\quad s_{1,2} = \pm j\omega_0$ $\quad v(t) = K\cos(\omega_0 t + \phi)$

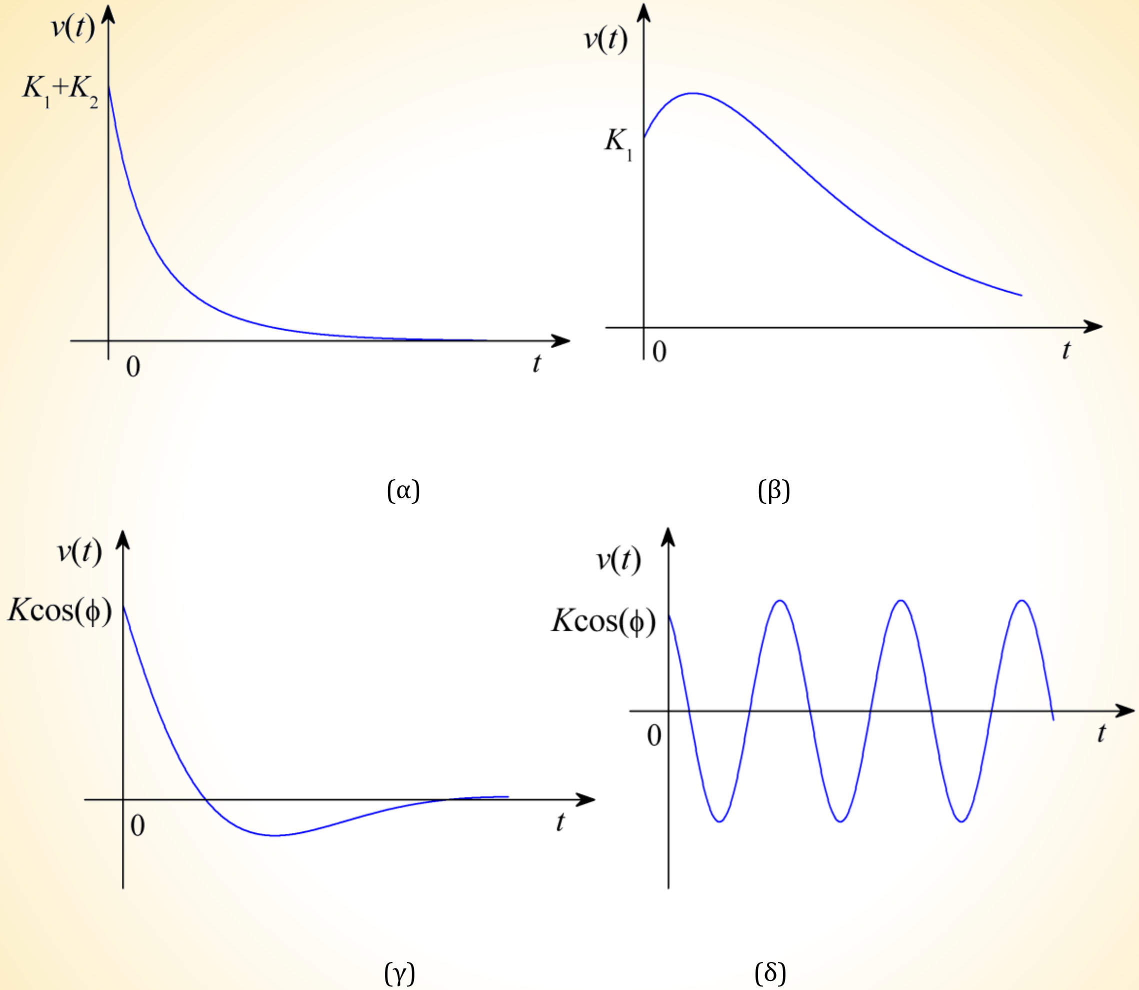
Συνεχής Ταλάντωση χωρίς απώλειες με πλάτος Κ.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου Παράλληλου RLC

Σημαντικός ο ρόλος του α:

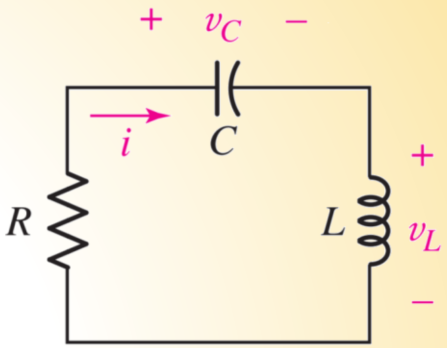
- $a = 0,\ s_{1,2} \in \mathrm{I}$
- $a > \omega_0,\ s_{1,2} \in \mathrm{Re}\{s\}^-$
- $a < \omega_0$ γ.τ. ημικύκλιο





Μορφές απόκρισης του κυκλώματος: (α) υπεραποσβεσμένη, (β) κρίσιμη, (γ) υποαποσβεσμένη και (δ) συνεχείς ταλαντώσεις.

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου Σειριακού RLC



Απόκριση όταν οι είσοδοι μηδενίζονται:

Αρχικές Συνθήκες: $v_C(0^-) = V_0, \quad i_L(0^-) = I_0$

Ισχύει: $i_C(t) = i_L(t) = i_R(t) = i(t)$

$$i_R = \frac{v}{R} \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{dv}{dt} \qquad v_L = v = L\frac{di_L}{dt}$$

ΝΤΚ: $v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) = 0$

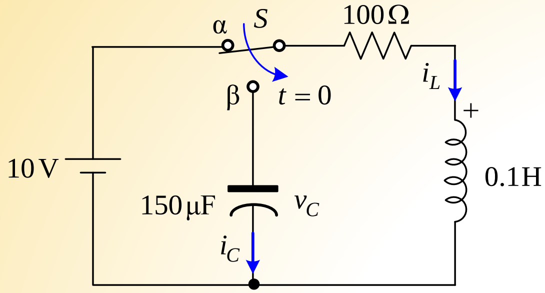
$$Ri + v_C + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \Rightarrow R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i + L\frac{d^2 i}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

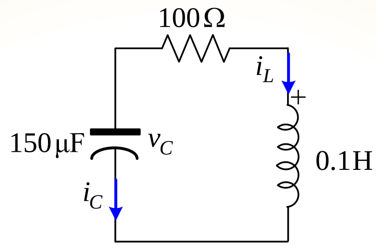
$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Παράδειγμα 5.1 Το κύκλωμα του Σχήματος (α) βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας με τον διακόπτη S στη θέση α. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο διακόπτης μετακινείται στη θέση β. Ζητείται να προσδιοριστούν το ρεύμα $i_L(t)$ και η τάση $v_C(t)$ για $t \geq 0$.



(α)



(β)

Λύση

$$i_L(0^-) = \frac{10}{100} = 0.1 \text{ A}$$

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = v_C \qquad i_L = -i_C = -C\frac{dv_C}{dt} \qquad \frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad s_1 = -71.825 \text{ και } s_2 = -928.1744$$

$$v_C(t) = K_1 e^{-71.7t} + K_2 e^{-928.17t} \qquad v_C(0^-) = K_1 + K_2 = 0 \rightarrow K_1 = -K_2 \qquad K_1 = -0.778$$

$$i_L(t) = -C\frac{dv_C(t)}{dt} = 71.8CK_1 e^{-71.8t} + 928.17CK_2 e^{-928.17t} \qquad i_L(0^-) = 71.8CK_1 + 928.17CK_2 = 0.1 \qquad K_2 = 0.778$$

$$v_C = 0.778\left[e^{-928.17t} - e^{-71.8t}\right]\text{V}$$

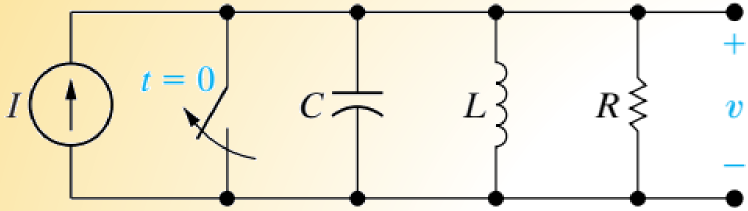
Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης 2ης Τάξης

Απόκριση όταν **αρχικές συνθήκες** των L, C είναι **μηδενικές**.

Απόκριση που **προέρχεται** από **εξωτερικές ανεξάρτητες πηγές**.

Ίδια μεθοδολογία με πρωτοτάξια.

Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης 2ης Τάξης



$$i(t) = C\frac{dv}{dt} + i_L + \frac{v}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{L}v + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

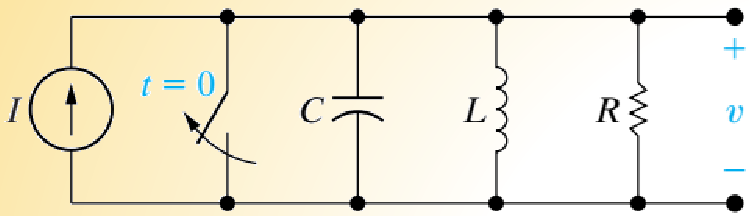
$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{C}\frac{di}{dt}$$

Αν $\frac{di}{dt} = 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0,\ \ i_L(0-) = 0 \text{ και } \ \mathrm{v_C}(0-) = 0$$

Αν $\frac{di}{dt} \neq 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon$ βρίσκουμε τη μερική λύση ανάλογα με τη μορφή του $\frac{1}{C}\frac{di}{dt}$

Παράδειγμα 1



$C = 0.1F, L = 1H, R = 10V$

(α) $\mathrm{I} = 10\ \mathrm{A}$

(β) $i(t) = 10\sin(2t)\ A$

- (α) $\frac{1}{C}\frac{di}{dt} = 0$ άρα μερική λύση $v_\mu(t) = A$
- δ.ε. $\frac{d^2\mathrm{A}}{dt^2} + \frac{d\mathrm{A}}{dt} + 10\mathrm{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = 0$
- Λύση ομογενούς:
- $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + 10v = 0 \Rightarrow s^2 + s + 10 = 0$
- Ρίζες: $s_{1,2} = -0.5 \pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{39}}{2}$
- Όλική απόκριση:
- $v(t) = e^{-0.5t}\left[K_1 sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ \ t\right) + K_2 cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ \ t\right)\right]$

Ικανοποίηση αρχικών συνθηκών:

$$v(t) = e^{-0.5t}\left[K_1 sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ t\right) + K_2 cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ t\right)\right]$$

$v(0+) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$

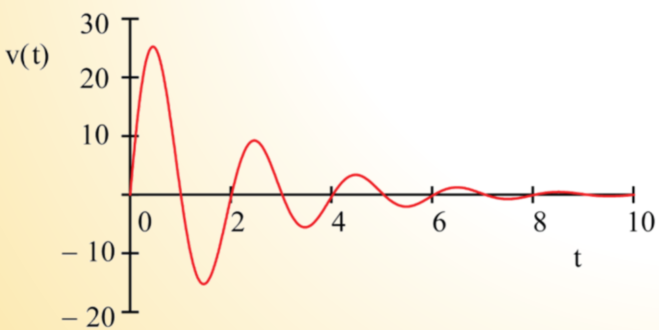
$$i_L(0+) = 0 \Rightarrow i(t) = C\frac{dv(0+)}{dt} + i_L(0+) + \frac{v(0+)}{R}$$

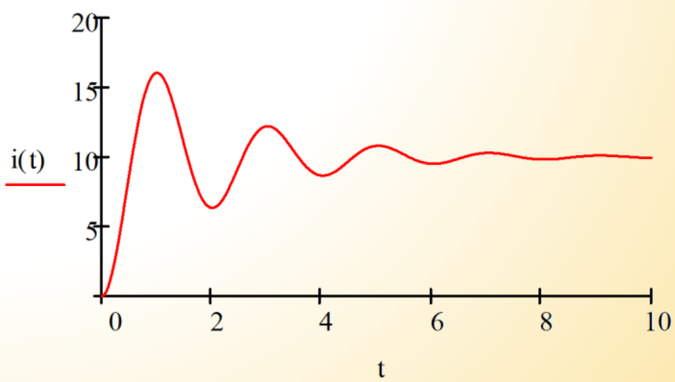
$$\Rightarrow \frac{dv(0+)}{dt} = 100 \Rightarrow \frac{\sqrt{39}}{2}K_1 = 100 \Rightarrow K_1 = 32.06$$

Τελικά

$v(t) = 32.06e^{-0.5t} sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ t\right)$V

$i_L(t) = I - \frac{v}{R} - C\,\frac{dv}{dt} = 10 - e^{-2t}\left[1.6 sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ t\right) - 10 cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ t\right)\right]$ A





Παράδειγμα 1

- (β) $i(t) = 10\sin(2t)\;\; A$
- $\frac{1}{C}\frac{di}{dt} = 200\cos(2t)$ άρα μερική λύση $v_{\mu}(t) = Asin2t + Bcos2t$
- δ.ε. $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + 10v = 200\cos(2t)$
- Ικανοποίηση μερικής λύσης:
- $-4Asin2t - 4Bcos2t + 2Acos2t - 2Bsin2t + 10Asin2t + 10Bcos2t = 200cos2t$
- $(6A - 2B)sin2t + (2A + 6B)cos2t = 200cos2t$
- Άρα $\begin{matrix} 6\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 0 \\ 2\mathrm{A} + 6\mathrm{B} = 200 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = 30 \end{cases}$
- $\Rightarrow v_{\mu}(t) = 10sin2t + 30cos2t$

Λύση ομογενούς:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{dv}{dt}+10v=0 \Rightarrow s^2+s+10=0$$

Ρίζες: $s_{1,2}=-0.5\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{39}}{2}$

Όλική απόκριση:

$$v(t)=e^{-0.5t}\left[K_1 sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ \ t\right)+K_2 cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ \ t\right)\right]+10sin2t+30cos2t$$

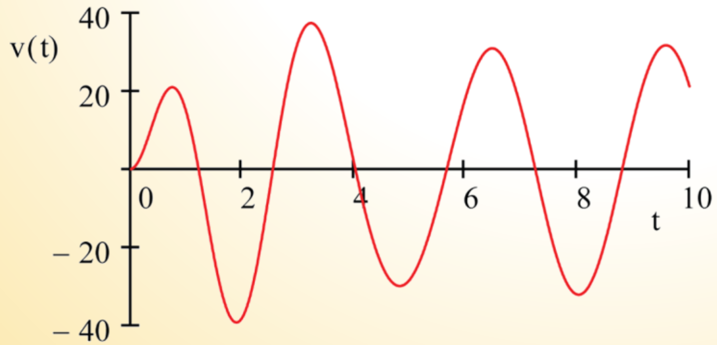
Ικανοποίηση αρχικών συνθηκών:

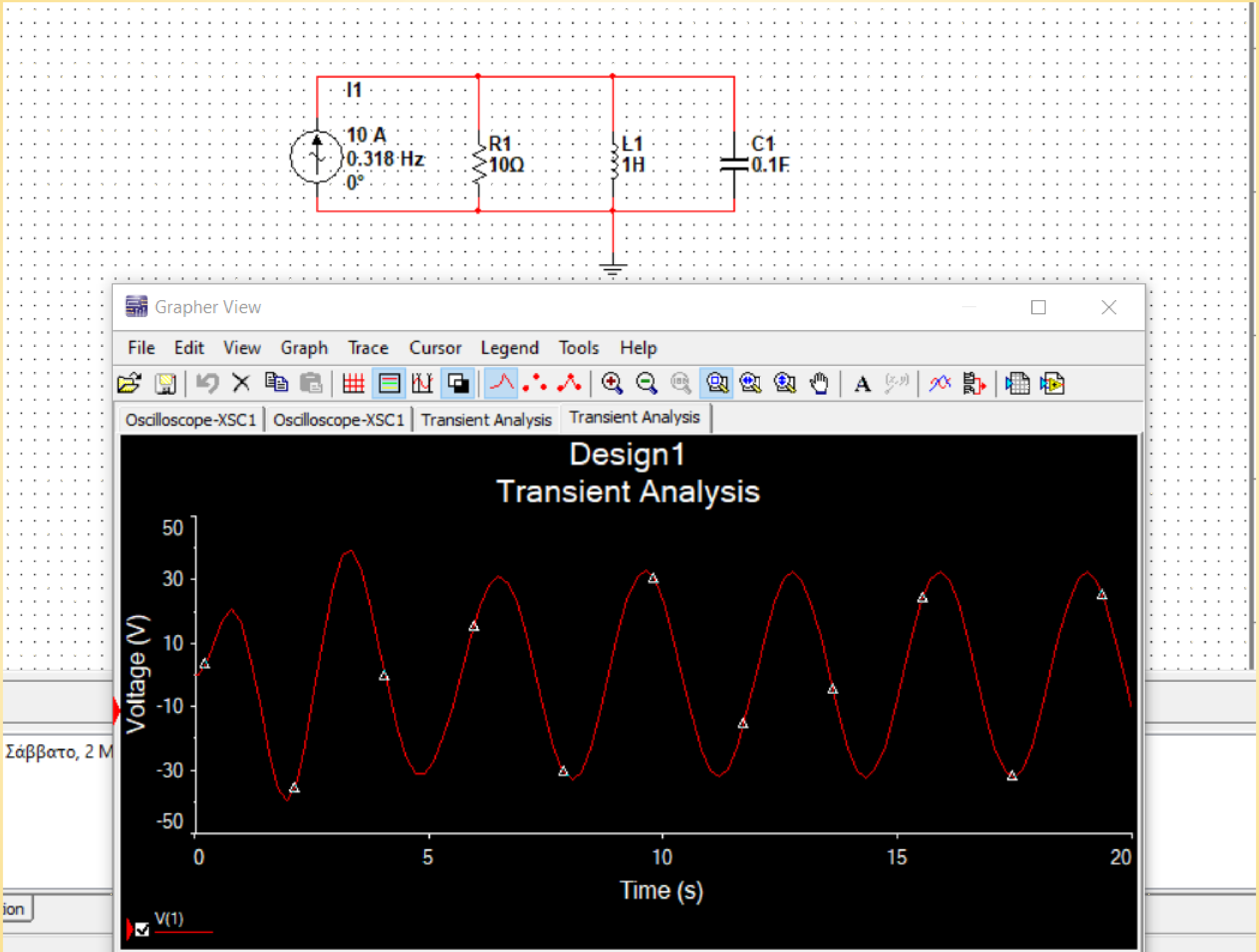
$$v(0+)=0 \Rightarrow K_2+30=0 \Rightarrow K_2=-30$$

$$i_L(0+)=0 \Rightarrow \frac{dv(0+)}{dt}=0 \Rightarrow -0.5K_2+\frac{\sqrt{39}}{2}K_1+20=0 \Rightarrow K_1=-11.209$$

Τελικά

$v(t)=e^{-0.5t}\left[-11.209sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ \ t\right)-30cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ \ t\right)\right]+10sin2t+30cos2t$ V




I1
10 A
0.318 Hz
0°
R1
10Ω
L1
1H
C1
0.1F
Grapher View
File Edit View Graph Trace Cursor Legend Tools Help
Oscilloscope-XSC1
Oscilloscope-XSC1
Transient Analysis
Transient Analysis
Design1
Transient Analysis
Voltage (V)
Time (s)
V(1)

Ολική Απόκριση 2ης Τάξης

Η Ολική Απόκριση όπως στα πρωτοτάξια.

Ολική Απόκριση = Απόκριση Μηδενικής Εισόδου + Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

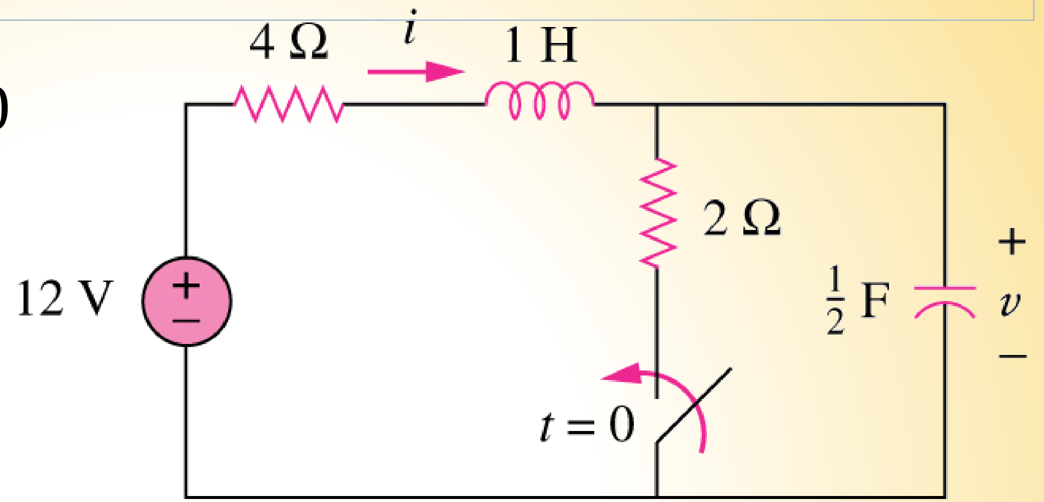
Διαδικασία

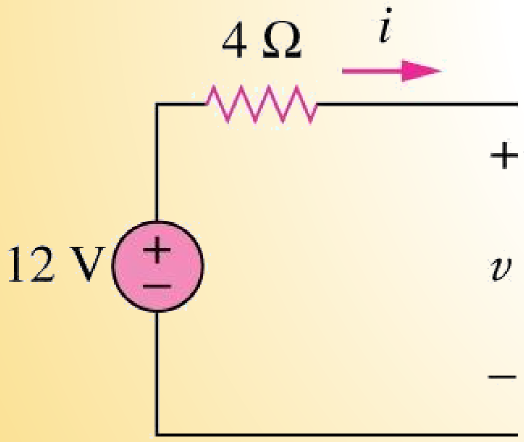
- Προσδιορισμός 2 ΔΕ πρώτου βαθμού από ανάλυση κυκλώματος.
- Με συνδυασμούς, παραγωγίσεις πάμε σε ΔΕ δευτέρου βαθμού.
- Επιλύουμε τη ΔΕ με την προηγούμενη μεθοδολογία.

Εναλλακτικά, ορίζουμε παράγωγο D=d/dt ως τελεστή και $D^{-1} = \int d\tau$ *με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Η ΔΕ μετατρέπεται σε γραμμική αλγεβρική εξίσωση και λύνεται αναλόγως.*

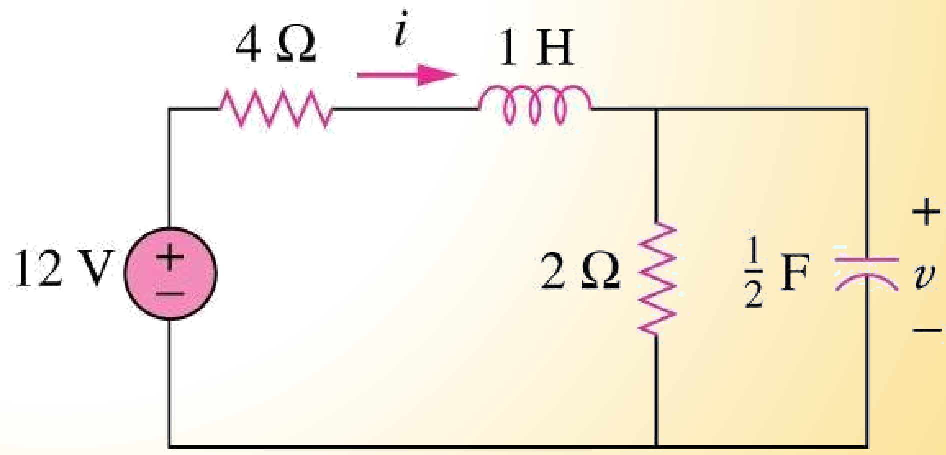
Παράδειγμα 2

Να βρεθούν τα v, i για $t > 0$

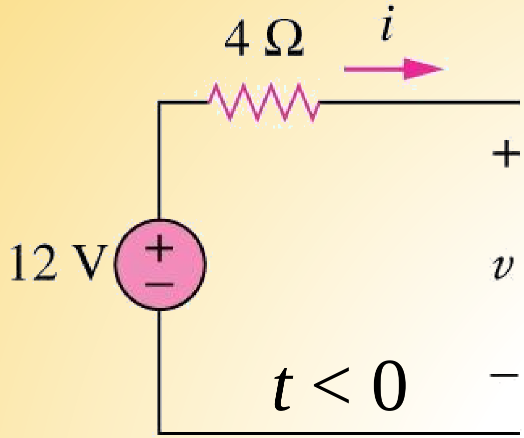


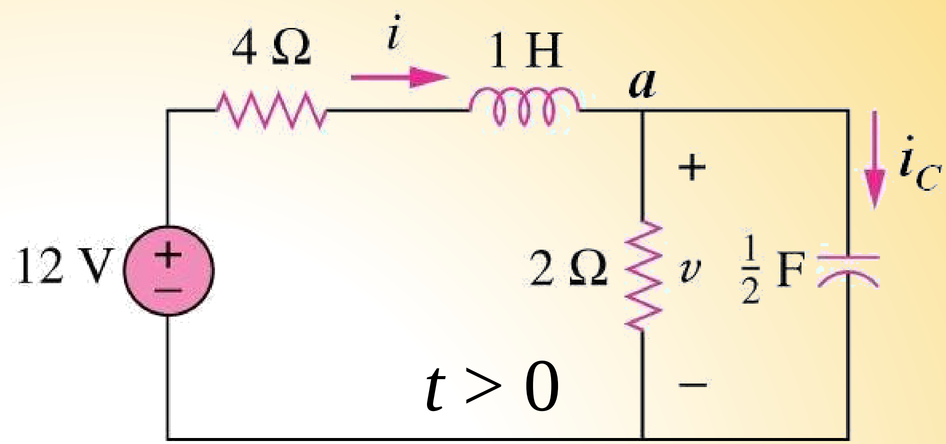


$t < 0$



$t > 0$





Αρχικές συνθήκες:

$$\begin{cases} v(0^+) = v(0^-) = 12 \text{ V} & (1a) \\ i(0^+) = i(0^-) = 0 & (1b) \end{cases}$$

Εξίσωση στον κόμβο a $(t > 0)$,

$$i(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v(0^+)}{2}$$

$$\Rightarrow i_C(0^+) = -6 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -12 \text{ V/s}$$

Τελική τιμή για $t \to \infty$:

$$\begin{cases} i(\infty) = \dfrac{12}{4+2} = 2 \text{ A} \\ v(\infty) = 2i(\infty) = 4 \text{ V} \end{cases}$$

Στον κόμβο a έχουμε την εξίσωση

$$\Rightarrow i = \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} \qquad (2)$$

Εξίσωση στον πρώτο βρόχο:

$$\Rightarrow 4i + 1\frac{di}{dt} + v = 12 \qquad (3)$$

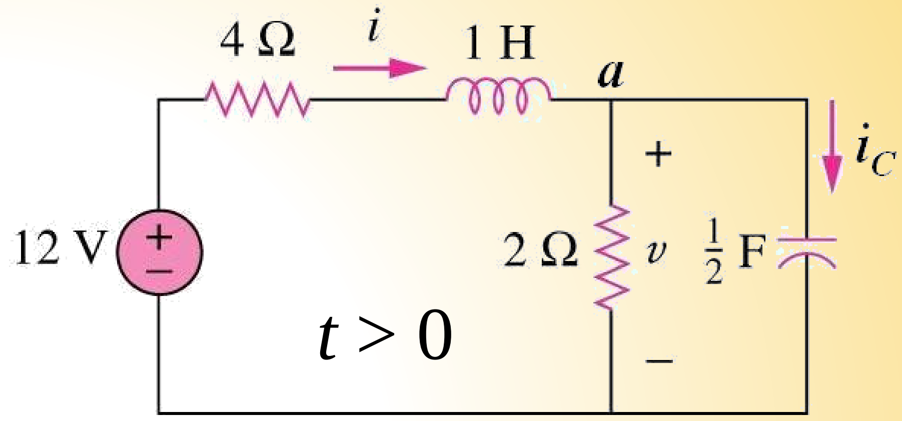
Αντικαθιστούμε την (2) στην (3):

$$2v + 2\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dt^2} + v = 12$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 24 \quad (4)$$

Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$



$$t > 0$$

$$\Rightarrow s = -2, \ -3$$

$$v(t) = v_\mu + v_o(t)$$

όπου $\begin{cases} v_\mu = v(\infty) = 4 \\ v_o(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t} \end{cases}$

Προσδιορισμός των συντελεστών A_1 και A_2

$$v(0+) = 4 + A_1 + A_2 = 12$$

$$\frac{dv(0+)}{dt} = -2A_1 - 3A_2 = -12 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 = 12 \\ A_2 = -4 \end{cases}$$

Τελικά, η ολική απόκριση έχει τη μορφή:

$$v(t) = 4 + 12e^{-2t} - 4e^{-3t}\mathrm{V}\,,\ t \geq 0$$

Για το ρεύμα:

$$i(t) = \frac{1}{2}v(t) + \frac{1}{2}\frac{dv(t)}{dt} = 2 - 6\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} + 4\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\ \mathrm{A}, \qquad t \geq 0$$