Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 5

Κυκλώματα Πρώτης Τάξης

του Νικολάου Παπαμάρκου

Με βάση το βιβλίο Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Τόμος ΑΒ

Ηλεκτρικά Κυκλώματα 1ης Τάξης

Συμπεριφορά γραμμικών RLC κυκλωμάτων στο πεδίο του χρόνου.

Κυκλώματα → Αντιστάτες R

Κυκλώματα → Στοιχεία Αποθήκευσης Ενέργειας L, C

Πρωτοτάξια = Αντιστάτης + 1 Στοιχείο Αποθήκευσης Ενέργειας

→ Κύκλωμα RL

→ Κύκλωμα RC

Δευτεροτάξια = Αντιστάτης + 2 Στοιχεία Αποθήκευσης Ενέργειας

→ Κύκλωμα RLC

Ηλεκτρικά Κυκλώματα 1ης και 2ης Τάξης

Συμπεριφορά γραμμικών RLC κυκλωμάτων στο πεδίο του χρόνου.

Θα ασχοληθούμε με:

1. Επίλυση Κυκλωμάτων στο πεδίο χρόνου με Διαφορικές Εξισώσεις.
2. Απόκριση Κυκλωμάτων σε κρουστικές/βηματικές πηγές.
3. Μεταβλητές Κατάστασης: Γενικευμένη Μέθοδος ανάλυσης n-οστής τάξης γραμμικών κυκλωμάτων.

Στοιχεία στη Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση

Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση = όταν το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ (άπειρο) χρόνο

Αν οι πηγές είναι συνεχείς, στη μόνιμη κατάσταση:

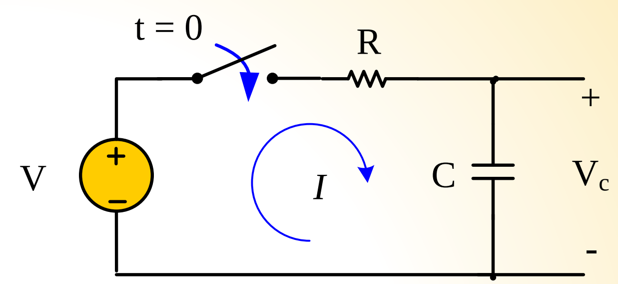
Τάσεις, ρεύματα, μαγνητικές ροές, φορτία δε μεταβάλλονται με χρόνο.

Πυκνωτής = Διακόπτης

Πηνίο = Βραχυκύκλωμα

Πυκνωτής στη Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση

Έστω κύκλωμα RC με $v_C(0-)=0$



Ισχύει $V = Ri + v_c$

Όμως $$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

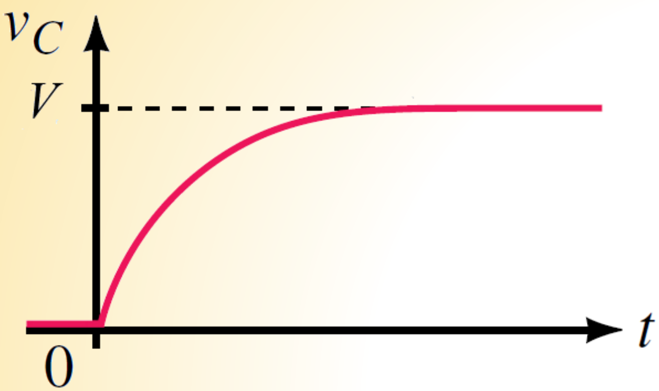
Άρα $$V = RC\frac{dv_c}{dt} + v_c \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{RC}v_c = \frac{1}{RC}V$$

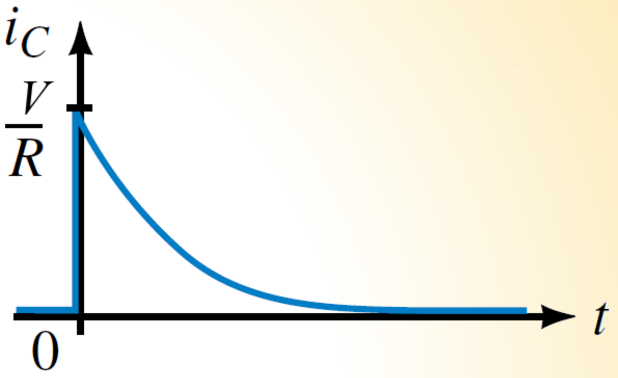
Γενική Μορφή Λύσης: $$v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC}), \forall t \geq 0$$

Το ρεύμα: $$i_c(t) = Ve^{-t/RC} / R$$

Στη μόνιμη κατάσταση: $$\lim_{t\to+\infty} v_c(t) = V \qquad \lim_{t\to+\infty} i_c(t) = 0$$

Πυκνωτής στη Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση





Άρα ο πυκνωτής στη μόνιμη κατάσταση είναι διακόπτης

Πολύ λογικό επίσης, γιατί αν στη μόνιμη κατάσταση

$v_C(t) = V$ τότε $i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} = 0$

Πυκνωτής (Ισχύς – Ενέργεια)

Ισχύς

$$p_C(t) = V_C(t) i_C(t) \Rightarrow p_C(t) = C V_C(t) \frac{dV_C}{dt}$$

Ενέργεια

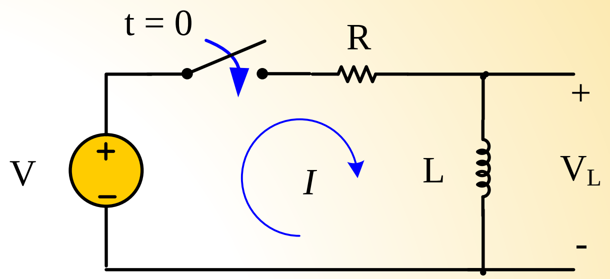
$$W_C(t) = \int_{t_0}^{t} p_C(t) dt = \int_{t_0}^{t} C V_C(t) \frac{dV_C}{dt} dt = C \int_{t_0}^{t} V_C(t) dV_C = \frac{1}{2} C [V_C^2(t) - V_C^2(t_0)]$$

Αν ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος $W_C(t) = \frac{1}{2} C V_C^2(t)$

Αν είναι αφόρτιστος και DC τάση $W_C(t) = \frac{1}{2} C V^2$

Πηνίο στη Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση

Έστω κύκλωμα RL



Ισχύει $V = Ri + v_L$

Όμως $v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

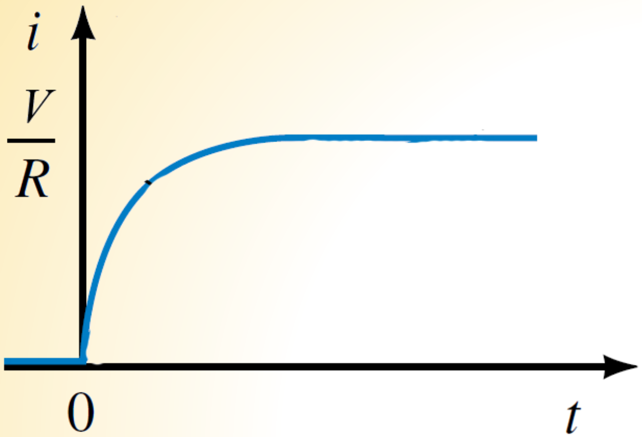
Άρα $V = Ri_L(t) + L\dfrac{di_L}{dt} \Rightarrow \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{R}{L}i_L = \dfrac{1}{L}V$

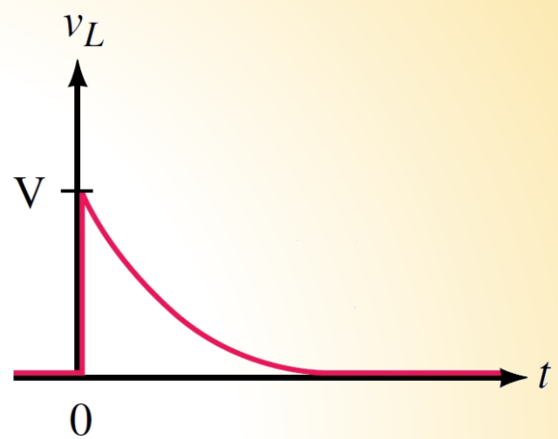
Γενική Μορφή Λύσης: $i_L(t) = V(1-e^{-Rt/L})/R, \forall t \geq 0$

Το ρεύμα: $v_L(t) = Ve^{-Rt/L}$

Στη μόνιμη κατάσταση: $\lim\limits_{t\to+\infty} v_L(t) = 0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} i_L(t) = V/R$

Πηνίο στη Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση





Άρα το πηνίο στη μόνιμη κατάσταση είναι βραχυκύκλωμα

Πολύ λογικό επίσης, γιατί αν στη μόνιμη κατάσταση

$$i_L(t) = V/R \qquad \text{τότε} \qquad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

Πηνίο (Ισχύς – Ενέργεια)

Ισχύς

$$p_L(t) = v_L(t) i_L(t) \Rightarrow p_L(t) = L i_L(t) \frac{di_L}{dt}$$

Ενέργεια

$$W_L(t) = \int_{t_0}^{t} p_L(t) dt = \int_{t_0}^{t} L i_L(t) \frac{di_L}{dt} dt = L \int_{t_0}^{t} i_L(t) di_L = \frac{1}{2} L [i_L^2(t) - i_L^2(t_0)]$$

Αν δε διαρρέεται από ρεύμα πρίν

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

Αν έχουμε και DC πηγή

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L \frac{V^2}{R^2}$$

Αντίσταση στη Σταθερή Μόνιμη Κατάσταση

Η αντίσταση στη μόνιμη κατάσταση είναι αντιστάτης.

Άρα DC κυκλώματα σε μόνιμη κατάσταση:

Πυκνωτής $\longrightarrow$ Ανοικτό Κύκλωμα

Πηνίο $\longrightarrow$ Βραχυκύκλωμα

Αντίσταση $\longrightarrow$ Αντίσταση

Στιγμιαίες Μεταβολές – Αρχικές Συνθήκες

Σε μια αντίσταση η μεταβολή της τάσης οδηγεί σε <u>γραμμική μεταβολή</u> του ρεύματος (Νόμος Ohm)

<u>Δεν ισχύει</u> το ίδιο για πυκνωτές / πηνία.

Πυκνωτής

$$v_C(t) = v_C(0^+) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt$$

Αν κάνουμε μια πεπερασμένη, στιγμαία μεταβολή στο ρεύμα i_c <u>δε θα</u> έχουμε μεταβολή της τάσης (ολοκλήρωμα μηδενικό).

Άρα είναι αδύνατο να μεταβάλουμε την τάση πυκνωτή με πεπερασμένη στιγμιαία μεταβολή ρεύματος.

$$v_C(0^-) = v_C(0^+)$$

Στιγμιαίες Μεταβολές – Αρχικές Συνθήκες

Πηνίο

$$i_L(t) = i_L(0^+) + \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt$$

Αν κάνουμε μια πεπερασμένη, στιγμιαία μεταβολή στην τάση v_L <u>δε θα</u> έχουμε μεταβολή της έντασης (ολοκλήρωμα μηδενικό).

Άρα είναι αδύνατο να μεταβάλουμε το ρεύμα πηνίου αν η μεταβολή τάσης να είναι πεπερασμένη.

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Στιγμιαίες Μεταβολές – Αρχικές Συνθήκες

Διαπιστώσεις

Κυκλώματα με >1 στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας λύνονται με ΔΕ.

Η επίλυση τους χρειάζεται τον προσδιορισμό Αρχικών Συνθηκών.

Πολλές φορές οι Αρχικές Συνθήκες δεν είναι μηδενικές.

Κυκλώματα με διακόπτες => Δημιουργούν Αρχικές Συνθήκες ≠ 0

Πρωτοτάξια Κυκλώματα

Πρωτοτάξια Κυκλώματα = έχουν 1 πηνίο ή 1 πυκνωτή

Η απόκριση πρωτοτάξιων γίνεται από τη λύση Διαφορικής Εξίσωσης **1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές**

$$\frac{dy}{dt} - py(t) = f(t) \longleftarrow \text{Συνάρτηση Διέγερσης Κυκλώματος}$$

Αν $f(t)=0$, τότε έχουμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ.

$$\frac{dy}{dt} = py(t) \Rightarrow \frac{dy}{y(t)} = pdt \Rightarrow d\ln y = pdt \Rightarrow \ln y = pt + C$$

Άρα η λύση της ομογενούς $y(t) = Ke^{pt}$

Πρωτοτάξια Κυκλώματα

Πλήρης Λύση ΔΕ = **Λύση Ομογενούς** + **Μερική Λύση**

Λύση Ομογενούς = Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Μερική Λύση = Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης

(εξαρτάται από τη διέγερση f(t))

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Απόκριση όταν οι είσοδοι μηδενίζονται.

Περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του κυκλώματος

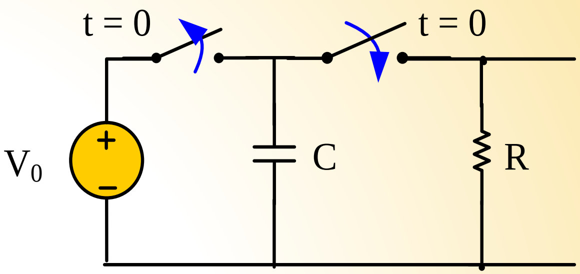
Για ένα πρωτοτάξιο κύκλωμα είναι της μορφής:

$$y(t) = Ke^{pt}$$

Το $p < 0$ καθορίζεται από τα R, C ή τα R, L του και λέγεται **Φυσική Συχνότητα** του κυκλώματος

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Κύκλωμα RC

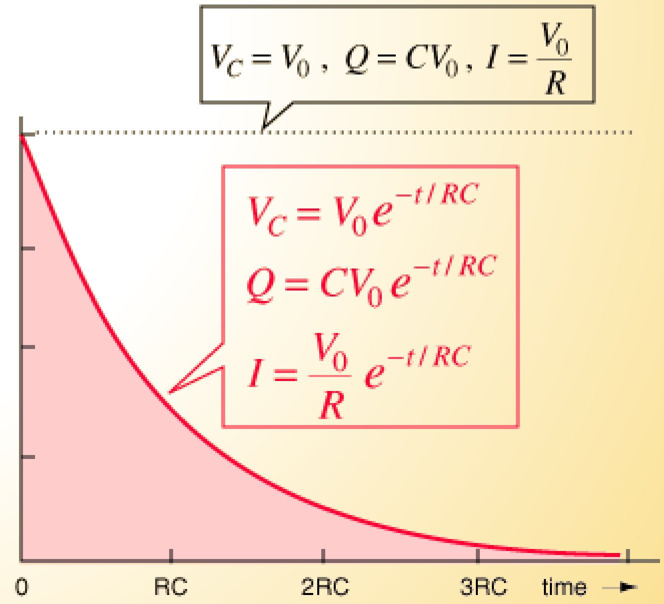


Για t >0 $$v_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$$

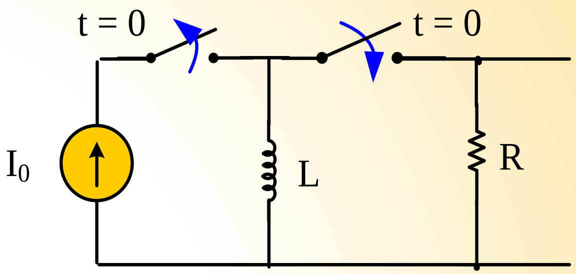
Σταθερά Χρόνου T=RC

$$\frac{v_C(T)}{V_0} = e^{-1} = 0.368$$

Για t > 5T έχουμε πλήρη εκφόρτιση.



Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

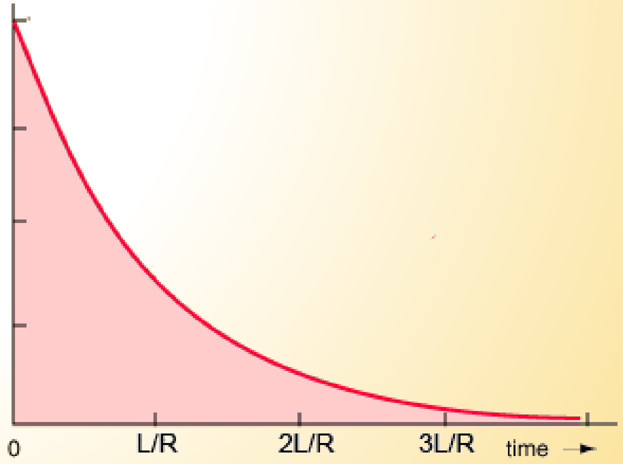


Κύκλωμα RL

Για t >0 $$i_L(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

Σταθερά Χρόνου T = L / R

$$\frac{i_L(T)}{I_0} = e^{-1} = 0.368$$

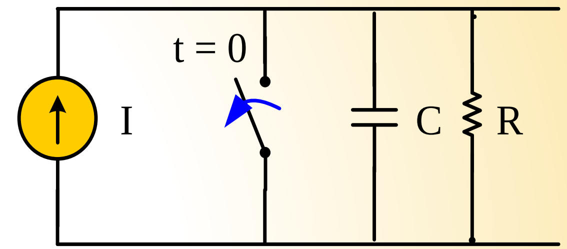


Για t > 5T έχουμε πλήρη μηδενισμό του ρεύματος.

Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Απόκριση όταν αρχικές συνθήκες των L, C είναι μηδενικές .

Παράδειγμα:



$$I = I_R + I_c \Rightarrow C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R}v_C = I \Rightarrow$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{I}{C}$$

Για t<0, πυκνωτής αφόρτιστος $v_C(0^-) = 0 = v_C(0^+)$

Για $t=0^+$, πυκνωτής μηδενική τάση και ρεύμα αντίστασης μηδέν.

Όλο το ρεύμα διαρρέει τον πυκνωτή $\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{I}{C}$

Καθώς το t προχωράει, η τάση πυκνωτή-αντίστασης αυξάνεται.

Στο τέλος ισχύει $v = RI$

ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

Γενική Μορφή: $$\frac{dy}{dt} + py = g(t)$$

Η λύση $y(t) = y_0(t) + y_\mu(t)$

$y_\mu(t)$ → Μερική Λύση Μη-ομογενούς

$y_0(t)$ → Λύση Ομογενούς

Η Λύση Ομογενούς $y_0(t) = Ke^{-pt}$

Η Μερική Λύση $y_\mu(t)$ εξαρτάται από $g(t)$

g(t)	**y_μ(t)**
A	K
Ae^{-at}, a>0	Ke^{-at}, a>0
At	K_1t+K_0
At^2	$K_2t^2+K_1t+K_0$
$A\sin(w_0t)$	$K_1\cos(w_0t) + K_2\sin(w_0t)$
$A\cos(w_0t)$	$K_1\cos(w_0t) + K_2\sin(w_0t)$
$Ae^{-at}\sin(w_0t)$, a>0	$e^{-at}[K_1\cos(w_0t) + K_2\sin(w_0t)]$
$Ae^{-at}\cos(w_0t)$, a>0	$e^{-at}[K_1\cos(w_0t) + K_2\sin(w_0t)]$
Ate^{-at} , a>0	$e^{-at}[K_1t + K_0]$

ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

$$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v(t)=\frac{\mathrm{I}}{C}$$

ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ: $v = v_0 + v_\mu$

v_μ → Μερική Λύση Μη-ομογενούς

v_0 → Λύση Ομογενούς

Ομογενής:

$$\frac{dv_0}{dt}+\frac{1}{RC}v_0=0 \Rightarrow \boxed{v_0(t)=Ae^{-t/RC}}$$

Μερική Λύση: Η μορφή της μερικής λύσης εξαρτάται από διέγερση.

Σταθερή διέγερση => σταθερή μερική λύση. $V_\mu(t)=B$

$$\frac{dv_\mu}{dt}+\frac{1}{RC}v_\mu=\frac{\mathrm{I}}{C} \Rightarrow \frac{1}{RC}\mathrm{B}=\frac{\mathrm{I}}{C} \Rightarrow \boxed{B=IR}$$

Άρα $v(t)=Ae^{-t/RC}+RI$

$v(0^+)=0 \Rightarrow A=-RI$

Τελική Λύση $v(t)=RI(1-e^{-t/RC})$

Ολική Απόκριση

Ολική Απόκριση = Απόκριση Μηδενικής Εισόδου + Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Ολική Απόκριση = Μεταβατική Απόκριση + Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης

Μεταβατική Απόκριση (transient response) → Αρχικές Συνθήκες
→ Απότομη Εφαρμογή διέγερσης

Μόνιμη Κατάσταση (steady state) → Απόκριση μετά τη λήξη της μεταβατικής απόκρισης

Μεταβατική Απόκριση = Λύση Ομογενούς ΔΕ

Μόνιμη Κατάσταση = Μερική Λύση μη-Ομογενούς ΔΕ

Μεθοδολογία Επίλυσης Κυκλωμάτων Πρώτης Τάξης

Γενική Μέθοδος

Β1. Με νόμους ανάλυσης ΗΚ προσδιορίζουμε τη γραμμική ΔΕ που περιγράφει το κύκλωμα.

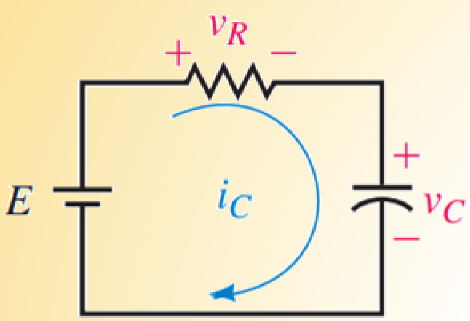
Β2. Επιλύουμε την ομογενή ΔΕ και προσδιορίζουμε τη μεταβατική απόκριση του κυκλώματος.

Β3. Μερική Λύση με βάσει τον πίνακα. (Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης)

Β4. Ολική Απόκριση = Μεταβατική Απόκριση + Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης

Β5. Οι τιμές σταθερών καθορίζονται απο Αρχικές Συνθήκες και τη μορφή της μερικής λύσης.

RC Κύκλωμα



$$v_C(0-) = V_o$$

RC= τ σταθ. χρόνου

Μερική Λύση:

$$v_{C,\mu} = \mathrm{A} \quad \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{E}$$

Λύση Ομογενούς:

$$v_{C,o} = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Ολική Απόκριση:

$$v_C(t) = E + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Διαφορική Εξίσωση:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{E}{RC}$$

Ικανοποίηση Αρχικής Συνθήκης:

$$v_C(0+) = E + K = \mathrm{V_o} \Rightarrow K = V_o - E$$

Ολική Απόκριση:

$$v_C(t) = E + (V_o - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

Απόκριση ρεύματος:

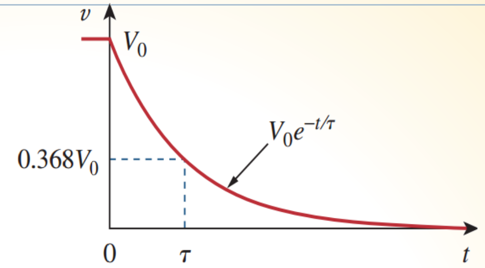
$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{E - V_o}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

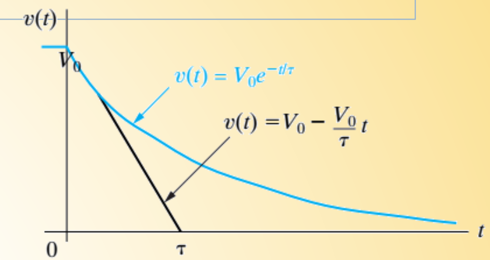
RC Κύκλωμα

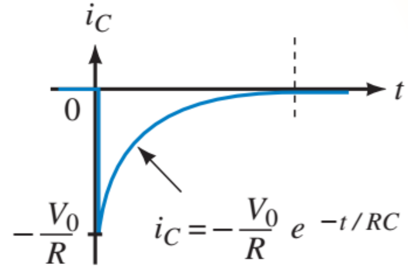
Απόκριση Μηδενικής Εισόδου :

$$E = 0 \Rightarrow v_C(t) = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_C(t) = -\frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



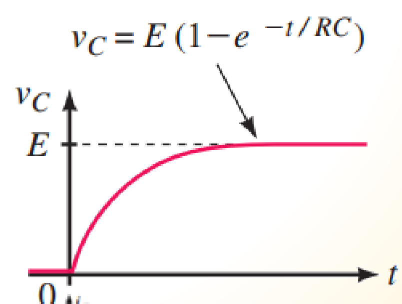


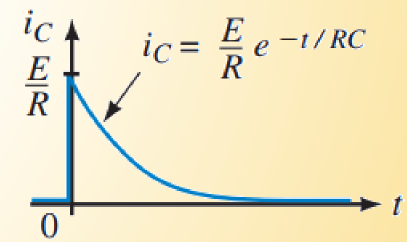


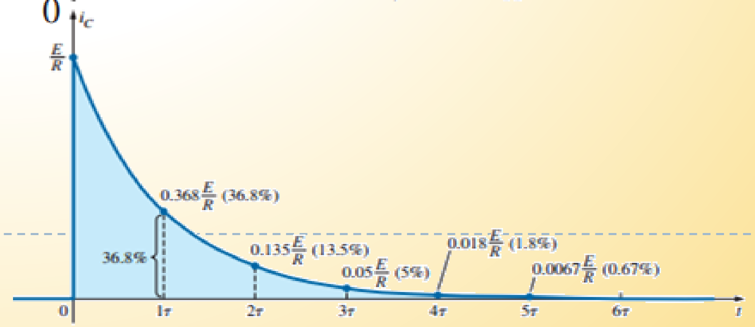
Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης :

$$V_o = 0 \Rightarrow v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

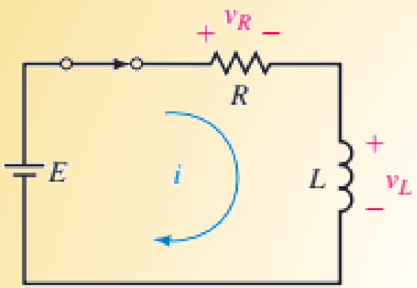
$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$







RL Κύκλωμα



$$i_L(0-) = I_o$$

L/R= τ σταθ. χρόνου

Μερική Λύση:

$$i_{L,\mu} = \mathrm{A} \quad \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{E/R}$$

Λύση Ομογενούς:

$$i_{L,o} = Ke^{-\frac{t}{L/R}}$$

Ολική Απόκριση:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} + Ke^{-\frac{t}{L/R}}$$

Διαφορική Εξίσωση:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{E}{L}$$

Ικανοποίηση Αρχικής Συνθήκης:

$$i_L(0+) = \frac{E}{R} + K = \mathrm{I_o} \Rightarrow K = I_o - E/R$$

Ολική Απόκριση:

$$i_L(t) = E/R + (I_o - E/R)e^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) + I_o e^{-\frac{t}{L/R}}$$

Απόκριση τάσης:

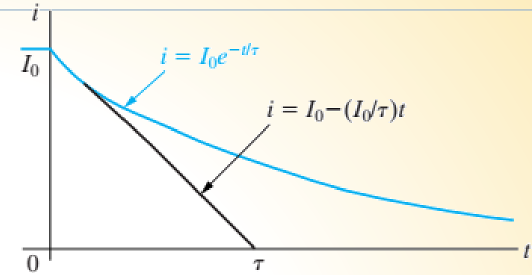
$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = (E - RI_o)e^{-\frac{t}{L/R}}$$

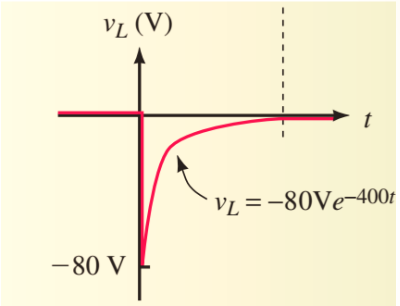
RL Κύκλωμα

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου :

$$E = 0 \Rightarrow i_L(t) = I_o e^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$v_L(t) = -I_o R e^{-\frac{t}{L/R}}$$

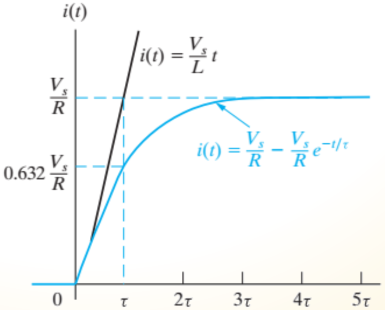


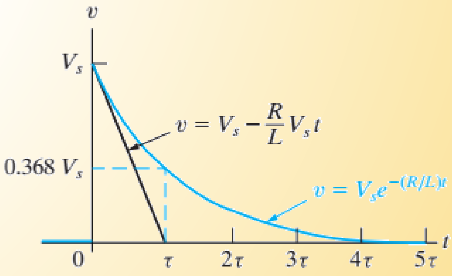


Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης :

$$I_{\text{o}} = 0 \Rightarrow i_L(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}})$$

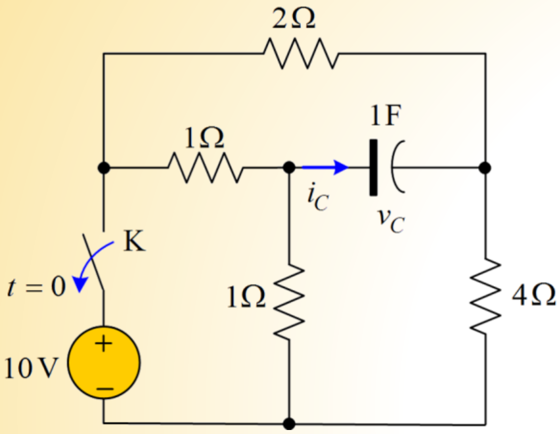
$$v_L(t) = E e^{-\frac{t}{L/R}}$$



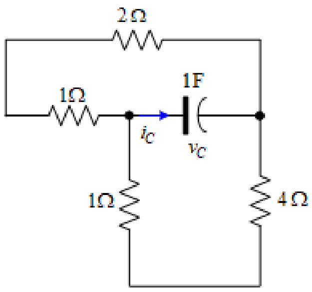


Παράδειγμα 1ο Απόκριση μηδενικής εισόδου

Παράδειγμα 5.1 Το κύκλωμα λειτουργεί για πολύ χρόνο με το διακόπτη K κλειστό. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο διακόπτης ανοίγει. Ζητείται ο προσδιορισμός των $v_C(t)$ και $i_C(t)$ για $t \geq 0$.



Για $t \geq 0$



$$R_1 = 1+4 = 5\Omega$$

και

$$R_2 = 1+2 = 3\Omega$$

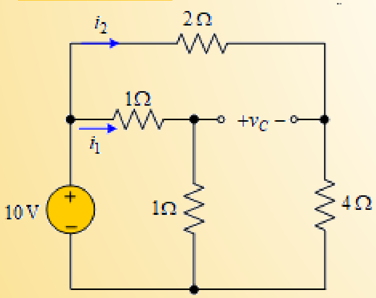
οπότε

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = \frac{15}{8}\,\Omega$$

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Λύση

Για $t < 0$



$$I_1 = \frac{10}{2} = 5\text{ A}$$

$$I_2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}\text{ A}$$

$$v_C = I_1 - 4I_2 = 5 - \frac{20}{3} = -\frac{5}{3}\text{ V}$$

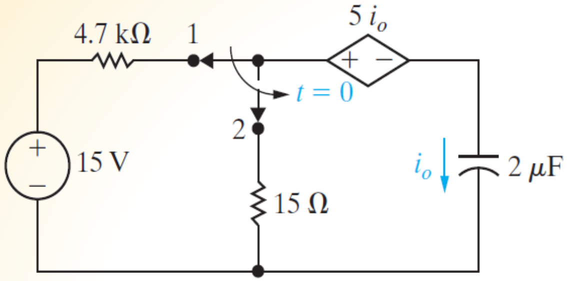
$$v_C(t) = v_C(0^-)e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{5}{3}e^{-\frac{8}{15}t}, \text{ για } t \geq 0$$

Το ρεύμα $i_C(t)$ για $t \geq 0$ προκύπτει ως εξής

$$i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{8}{9}e^{-\frac{8}{15}t}, \text{ για } t \geq 0$$

Παράδειγμα 2ο Απόκριση μηδενικής εισόδου

Στο κύκλωμα, ο διακόπτης είναι στη θέση 1 για μεγάλο χρονικό διάστημα, και μετακινείται στη θέση 2 τη στιγμή t = 0. Να υπολογιστεί το ρεύμα $i_o\,(t)$ για $t > 0$.



Λύση

Για $t < 0$ ο πυκνωτής λειτουργεί ως διακόπτης με αποτέλεσμα $i_o = 0$ και συνεπώς $v_C(0^-) = 15\text{ V}$.

Για $t \geq 0$ από το βρόχο που σχηματίζεται προκύπτει ότι

$$-5i_o = 15i_o + v_C \Rightarrow 20i_C + v_C = 0$$

$$\Rightarrow 40 \times 10^{-3}\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv_C}{dt} + 25v_C = 0$$

$$v_C(t) = Ke^{-25t}$$

Από την αρχική συνθήκη βρίσκουμε

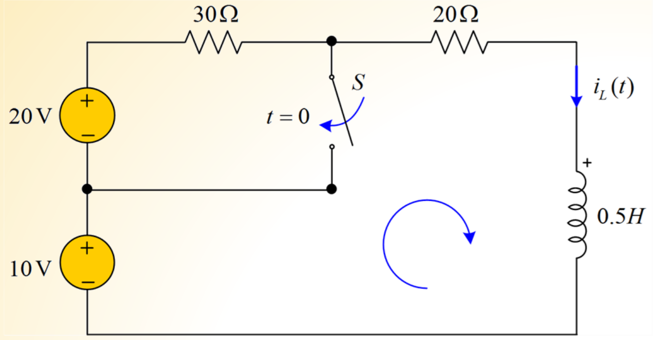
$$v_C(0) = K = 15$$

Έτσι τελικά

$$v_C(t) = 25e^{-25t}, \qquad t \geq 0$$

Παράδειγμα 3ο

Παράδειγμα 5.1 Το κύκλωμα του Σχήματος 1), λειτουργεί για μεγάλο χρονικό διάστημα με το διακόπτη S ανοιχτό. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο διακόπτης κλείνει. Να βρεθεί το $i_L(t)$ για $t \geq 0$.



Σχήμα 1)

Λύση

Για $t=0$ που ο διακόπτης S είναι ανοιχτός, οι δύο πηγές τάσης βρίσκονται συνδεδεμένες σε σειρά και το πηνίο συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα. Έτσι, προκύπτει

$$i_L(0^-)=\frac{30}{30+20}=\frac{3}{5}\text{A}$$

Για $t \geq 0$

$$\frac{di_L}{dt}+40i_L=20$$

Η μερική λύση θα είναι μία σταθερά A με τιμή

$$40A=20 \Rightarrow A=0.5$$

Η λύση της ομογενούς δ.ε. έχει τη μορφή

$$i_{L0}(t)=Ke^{-40t}$$

Συνεπώς, η ολική απόκριση του κυκλώματος έχει τη μορφή

$$i_L(t)=Ke^{-40t}+0.5\,,\ \text{για } t \geq 0$$

Το K προσδιορίζεται από την αρχική συνθήκη φόρτισης του πηνίου

$$i_L(0-)=i_L(0+)=K+0.5=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow K=0.1$$

Άρα, τελικά

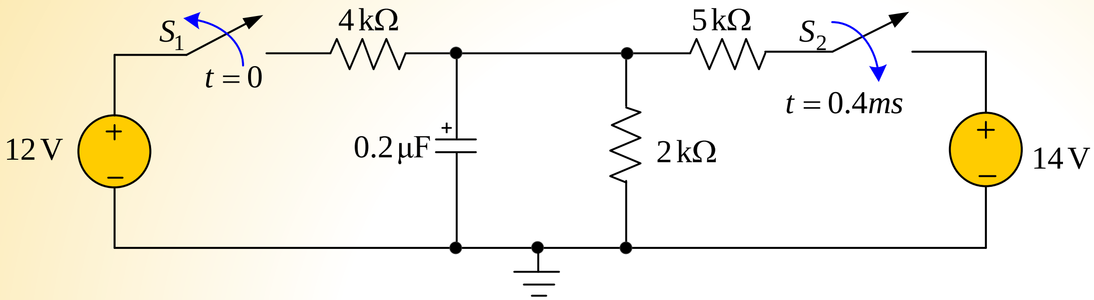
$$i_L(t)=0.1e^{-40t}+0.5\text{A}\,,\ \text{για } t \geq 0$$

$$\boxed{i_L(t)=E/R+(I_o-E/R)e^{-\frac{t}{L/R}}}$$

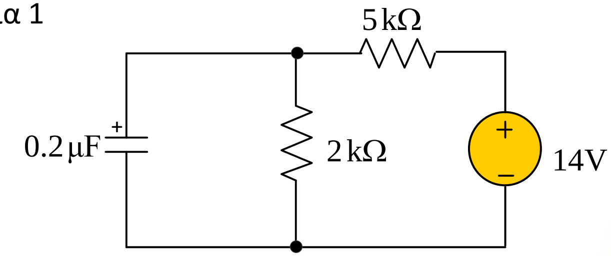
$$\frac{E}{R}=\frac{10}{20}=0.5 \qquad I_o-\frac{E}{R}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=0.1 \qquad \frac{R}{L}=\frac{20}{0.5}=40$$

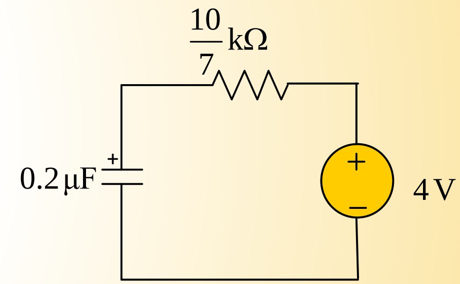
Παράδειγμα 4ο Με δύο διακόπτες

Στο κύκλωμα, ο διακόπτης S_1 ανοίγει τη χρονική στιγμή $t=0$ ενώ ο διακόπτης S_2 κλείνει τη χρονική στιγμή $t=0.4ms$. Να βρεθεί η τάση $v_C(t)$ για $t \geq 0$.



Σχήμα 1





Λύση

(α) $t \leq 0$

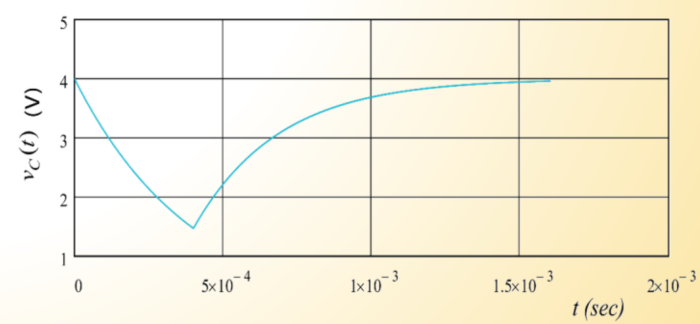
$$v_C(0-) = 12\frac{2k\Omega}{4k\Omega + 2k\Omega} = 4\text{V}$$

(β) $0 \leq t < 0.4ms$

$$v_C(t) = v_C(0+)e^{-\frac{t}{RC}} = 4e^{-\frac{t}{4\times10^{-4}}}\text{V}$$

$$v_C(0.4ms) = 1.472\text{V}$$

(γ) $t \geq 0.4ms$



$$R_T = \frac{2\times5}{2+5} = \frac{10}{7}k\Omega \qquad V_T = 14\frac{2}{2+5} = 4\text{V}$$

$$v_C(t) = 4 + \left(v_C(0.4ms+) - 4\right)e^{-\frac{t-0.4ms}{R_T C}} = 4 - 2.528e^{-\frac{t-0.4ms}{2.857\times10^{-7}}}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = 4 - 10.253e^{-3500t}u(t-0.4ms)\text{V}$$

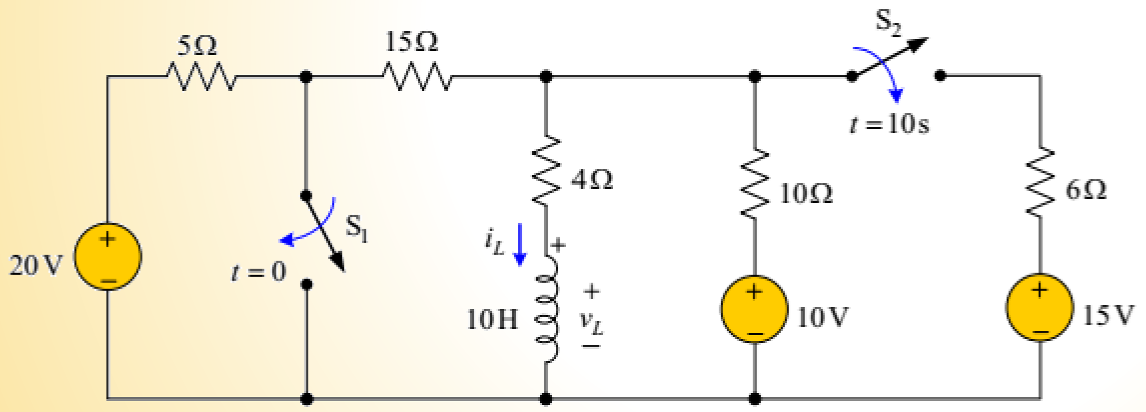
Άσκηση 5.22

Στο RL κύκλωμα του Σχ. 1 υπάρχουν δύο διακόπτες. Θεωρούμε ότι οι δύο διακόπτες είναι ανοιχτοί για μεγάλο χρονικό διάστημα.

(α) Να βρεθεί το ρεύμα $i_L(t)$ για $t \geq 0$ αν ο διακόπτης S_1 κλείσει τη χρονική στιγμή $t=0$ ενώ ο διακόπτης S_2 παραμένει ανοιχτός. Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος;

(β) Υποθέτουμε ότι ο διακόπτης S_1 κλείνει τη στιγμή $t=0$ και ο διακόπτης S_2 κλείνει τη στιγμή $t=10\text{ sec}$. Να υπολογιστούν:

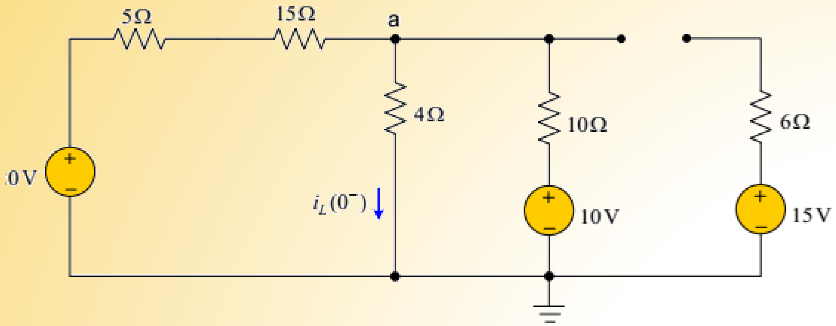
- Τη νέα σταθερά χρόνου του κυκλώματος για $t>10\text{ sec}$
- Το $i_L(t)$ για $t=10\text{ sec}$
- Το $i_L(t)$ για $t>10\text{ sec}$



Σχήμα 1

Λύση

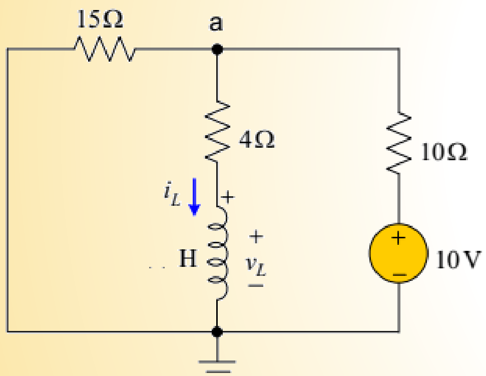
(α) Για $t < 0$ sec :

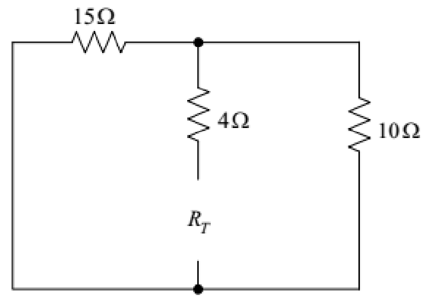


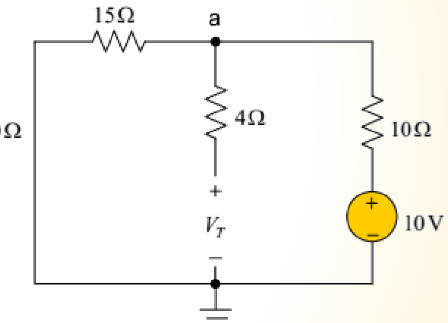
$$\frac{V_a}{4} + \frac{V_a - 20}{20} + \frac{V_a - 10}{10} = 0 \Rightarrow V_a = 5\text{V}$$

$$i_L(0^-) = \frac{V_a}{4} = \frac{5}{4} = 1.25\,\text{A}$$

(β) Για $0 \le t \le 10$ sec







$$R_T = 4 + 10//15 = 10\Omega$$

$$V_T = 10\frac{15}{15+10} = 6\,\text{V}$$

$$\boxed{i_L(t) = V_T/R_T + (i(0+) - V_T/R_T)e^{-\frac{t}{L/R_T}}}$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_T}{L}i_L = \frac{V_s}{L} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + i_L = 0.6$$

$$\tau = \frac{L}{R_T} = 1\text{sec}$$

$$i_L(t) = K_1 e^{-t} + K_2$$

$$K_2 = 0.6$$

$$i_L(0^+) = K_1 + 0.6 = 1.25 \Rightarrow K_1 = 0.65$$

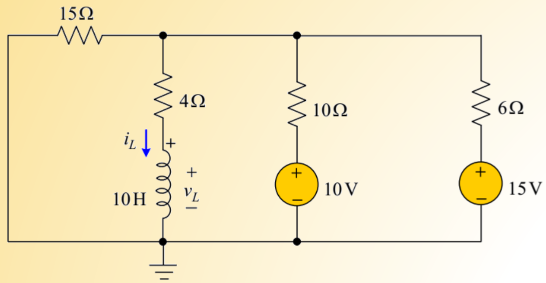
$$i_L(t) = 0.6 + 0.65e^{-t}\,,\; t \ge 0$$

$$\frac{V_T}{R_T} = 0.6$$

$$i(0+) - \frac{V_T}{R_T} = 1.25 - 0.6 = 0.65$$

(γ) Για $t \geq 10$ sec

$$i_L(10\text{s}) = 0.6 + 0.65e^{-10} = 0.60002951 \approx 0.6$$



Σχήμα 6. Το κύκλωμα για $t > 10\text{sec}$.

Ας βρούμε τώρα το Thevenin ισοδύναμο κύκλωμα αντικαθιστώντας το πηνίο με μια αντίσταση R. Έτσι από το κύκλωμα του Σχ. 7 έχουμε την ακόλουθη εξίσωση του κόμβου

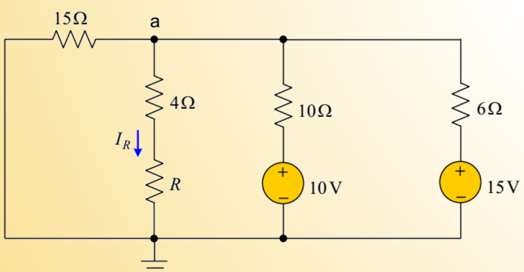
$$\frac{V_a}{15} + \frac{V_a}{4+R} + \frac{V_a - 10}{10} + \frac{V_a - 15}{6} = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε

$$\Rightarrow V_a = \frac{21}{2}\frac{R+4}{R+7}$$

Συνεπώς

$$I_R = \frac{21}{2}\frac{1}{R+7}$$

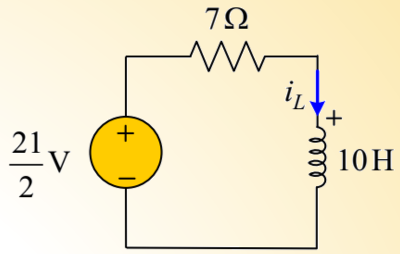


Σχήμα 7. Το κύκλωμα για τον υπολογισμό του ισοδύναμου Thevenin.

$$I_N = \lim_{R \to 0} I_R = \frac{3}{2}\text{A}$$

$$V_T = \lim_{R \to \infty} RI_R = \lim_{R \to \infty} \frac{21}{2}\frac{R}{R+7} = \frac{21}{2}\text{V}$$

$$R_T = \frac{V_T}{I_N} = 7\Omega$$



Σχήμα 8. Ισοδύναμο RL κύκλωμα για $t > 10\text{sec}$.

Έτσι, το νέο ισοδύναμο RL κύκλωμα είναι αυτό του Σχ. 8 από το οποίο προκύπτει η ακόλουθη δ.ε.

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_T}{L}i_L = \frac{V_s}{L} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + 0.7i_L = 1.05$$

Η σταθερά χρόνου ισούται με

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{10}{7}\text{sec}$$

Η ολική λύση της δ.ε. έχει τη μορφή

$$i_L(t) = K_1 e^{-0.7t} + K_2$$

όπου

$$K_2 = \frac{1.05}{0.7} = 1.5$$

Από τη συνθήκη τη χρονική στιγμή $t = 10\text{sec}$ προκύπτει

$$i_L(10^-) = i_L(10^+) = K_1 e^{-7} + 1.5 = 0.6 \Rightarrow K_1 = -0.9 \times e^7 \approx -986.97$$

Συνεπώς

$$i_L(t) = 1.5 - 986.97e^{-0.7t}\text{A}, \; t \geq 10\text{s}$$