Μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής συνάρτησης $e^{-at}u(t)$

Είναι

$$\mathbf{F}(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt=-\frac{1}{s+a}[e^{-(s+a)t}]\Big|_{0^-}^{\infty}=\frac{1}{s+a}[e^{-(\sigma+a+j\omega)t}]\Big|_{\infty}^{0^-}$$

$$=\frac{1}{s+a}\Big[e^{-(\sigma+a)t}(\cos\omega t-j\sin\omega t)\Big]\Big|_{\infty}^{0^-}=\frac{1}{s+a}\text{, με } \sigma>-a \qquad (14.29)$$

Άρα

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)]=\frac{1}{s+a},\ \text{με } \sigma>-a \qquad (14.30)$$

Η σχέση αυτή είναι από τις πλέον συχνά χρησιμοποιούμενες για την αντιστροφή συναρτήσεων στα ηλεκτρικά κυκλώματα.

Παράδειγμα 14.2 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $\cos(\omega t)u(t)$ και $\sin(\omega t)u(t)$.

Λύση

Είναι γνωστό από την ταυτότητα του Euler ότι

$$\cos(\omega t)=\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2} \quad \text{και} \quad \sin(\omega t)=\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j} \qquad (14.31)$$

Λόγω της σχέσης (14.30) και της ιδιότητας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)u(t)]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2},\ \text{με } \sigma>0 \qquad (14.32)$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)]=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\ \text{με } \sigma>0 \qquad (14.33)$$

Παράδειγμα 14.3 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace για τη συνάρτηση $f(t)=te^{-at}u(t)$.

Λύση

Για να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace $\mathbf{F}(s)$ εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση:

$$\mathbf{F}(s)=\int_{0^-}^{\infty} te^{-(a+s)t}dt=-\frac{te^{-(a+s)t}}{s+a}\Bigg|_{0^-}^{\infty}+\int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a}dt \qquad (14.34)$$

Η περιοχή σύγκλισης καθορίζεται για $\sigma>-a$ έτσι ώστε ο πρώτος όρος του δευτέρου μέρους της ανωτέρω εξίσωσης να είναι ίσος με μηδέν. Έτσι

$$\mathcal{L}\left[te^{-at}u(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-(a+s)t}}{s+a}dt=\frac{1}{(s+a)^2}\text{, με } \sigma>0 \tag{14.35}$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί μια μερική περίπτωση της γενικής σχέσης

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{-at}u(t)\right]=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}\text{, με } \sigma>0 \tag{14.36}$$

Παράδειγμα 14.4 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $\sinh(at)u(t)$ και $\cosh(at)u(t)$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\sinh(at)=\frac{e^a-e^{-a}}{2} \quad \text{και} \quad \cosh(at)=\frac{e^a+e^{-a}}{2} \tag{14.37}$$

Λόγω και πάλι της ιδιότητας της γραμμικότητας έχουμε:

$$\mathcal{L}[\sinh(at)u(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{e^a-e^{-a}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2-a^2} \tag{14.38}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)u(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2} \tag{14.39}$$

Παράδειγμα 14.5 Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $t^n u(t)$, n > 0.

Λύση

Με εφαρμογή ολοκλήρωσης κατά παράγοντε έχουμε:

$$\mathcal{L}\left[t^n u(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty}t^n e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}\frac{t^n}{-s}de^{-st}=\left.\frac{t^n}{-s}e^{-st}\right|_{0^-}^{\infty}+\frac{n}{s}\int_{0^-}^{\infty}t^{n-1}e^{-st}dt$$

$$=\frac{\infty^n}{-s}e^{-s\infty}-\frac{0^n}{-s}e^{-s0}+\frac{n}{s}\int_{0^-}^{\infty}t^{n-1}e^{-st}dt=\frac{n}{s}\int_{0^-}^{\infty}t^{n-1}e^{-st}dt \to \tag{14.40}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\left[t^n u(t)\right]=\frac{n}{s}\mathcal{L}\left[t^n u(t)\right] \tag{14.41}$$

και επειδή $t \to \frac{1}{s^2}$ από τη παραπάνω σχέση εύκολα πλέον προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\left[t^n u(t)\right]=\frac{n!}{s^{n+1}} \tag{14.42}$$

Ο Πίνακας 14.1 δίνει συνοπτικά τους μετασχηματισμούς Laplace χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Πίνακας 14.1 Μετασχηματισμός Laplace χαρακτηριστικών συναρτήσεων

$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$	$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
$\delta(t)$	1	$\dfrac{ae^{-at}-be^{-bt}}{b-a}, a \neq b$ $(a,b)>0$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\sin(\omega t+\phi)$	$\dfrac{s\sin\phi+\omega\cos\phi}{s^2+\omega^2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\cos(\omega t+\phi)$	$\dfrac{s\cos\phi-\omega\sin\phi}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$, $a>0$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\dfrac{d\delta(t)}{dt}$	s	$e^{-at}\cos(\omega t)$, $a>0$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	$e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$, $a>0$	$\dfrac{(s+a)\sin\phi+\omega\cos\phi}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at} , $a>0$	$\dfrac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos(\omega t+\phi)$, $a>0$	$\dfrac{(s+a)\cos\phi-\omega\sin\phi}{(s+a)^2+\omega^2}$
te^{-at} , $a>0$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$t\sin(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t^n e^{-at}$, $a>0$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$te^{-at}\sin(\omega t)$	$2\omega\dfrac{s+a}{\left[(s+a)^2+\omega^2\right]^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}, a \neq b$ $(a,b)>0$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$

14.4 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Θα εξετάσουμε τώρα ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

Πολλαπλασιασμός με μια σταθερά

Αν

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s)$$

τότε

$$\mathcal{L}[Kf(t)] = K\mathbf{F}(s) \tag{14.43}$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $Kf(t)$, όπου K μια σταθερά, ισούται με τη σταθερά K επί το μετασχηματισμό Laplace της $f(t)$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής

$$\mathcal{L}[Kf(t)] = \int_{0^-}^{\infty} Kf(t)e^{-st}dt = K\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = K\mathcal{L}[f(t)]$$

Παράδειγμα 14.6 Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$f(t) = 2\sin(x)\cos(\omega t)$

Λύση

Εδώ η σταθερά ισούται με $K = 2\sin(x)$ ενώ $f(t) = \cos(\omega t)$. Επομένως

$$\mathbf{F}(s) = 2\sin(x)\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Γραμμικότητα

Ο μετασχηματισμός Laplace ενός πεπερασμένου αθροίσματος χρονικών συναρτήσεων είναι ίσος με το άθροισμα των μετασχηματισμών των επιμέρους συναρτήσεων. Δηλαδή

$$\mathcal{L}[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)+K_3f_3(t)+....] = K_1\mathbf{F}_1(s)+K_2\mathbf{F}_2(s)+K_3\mathbf{F}_3(s)+... \tag{14.44}$$

όπου $K_i, i = 1,2,3,...$ πραγματικές σταθερές.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού γίνεται ως εξής

$$\mathcal{L}[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)+K_3f_3(t)+....] = \int_{0^-}^{\infty}[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)+K_3f_3(t)+....]e^{-st}dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty}K_1f_1(t)e^{-st}dt + \int_{0^-}^{\infty}K_2f_2(t)e^{-st}dt + \int_{0^-}^{\infty}K_3f_3(t)e^{-st}dt + ...$$

$$= K_1\mathbf{F}_1(s)+K_2\mathbf{F}_2(s)+K_3\mathbf{F}_3(s)+...$$

Παράδειγμα 14.7 Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης.

$$f(t)=3(1-e^{-2t})u(t)$$

Λύση

Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f(t)=(3-3e^{-2t})u(t)=3u(t)-3e^{-2t}u(t)=3f_1(t)-3f_2(t)$$

όπου $f_1(t)=u(t)$ και $f_2(t)=e^{-2t}u(t)$.

Συνεπώς

$$\mathbf{F}(s)=3\mathcal{L}[u(t)]-3\mathcal{L}\left[e^{-2t}u(t)\right]=3\left(\frac{1}{s}\right)-3\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}(s)=\frac{3(s+2)-3s}{s(s+2)}=\frac{6}{s(s+2)}$$

Διαφόριση

Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(t)$ στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχίζεται στο πεδίο Laplace με τον πολλαπλασιασμό της $\mathbf{F}(s)$ με το s μείον την αρχική τιμή της συνάρτησης $f(0^-)$. Δηλαδή

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=s\mathbf{F}(s)-f(0^-) \tag{14.45}$$

Για την απόδειξη εργαζόμαστε ως ακολούθως:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{\infty}+s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

όπου το $e^{-st}\to 0$ όταν το $t\to\infty$ και $e^{-st}\to 1$ όταν $t\to 0^-$. Επομένως, αφού και το ολοκλήρωμα $\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ προκύπτει:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=s\mathbf{F}(s)-f(0^-)$$

Με αυτή την ιδιότητα μπορούμε να βρούμε το μετασχηματισμό της n-οστής παραγώγου χρησιμοποιώντας επαναληπτικά την παραπάνω σχέση. Έτσι

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n\mathbf{F}(s) - s^{n-1}f(0^-) - \ldots - f^{(n-1)}(0^-) \qquad (14.46)$$

όπου $f^{(n-1)}(0^-)$ είναι η $(n-1)$-οστή παράγωγος της f για $t=0^-$.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε εδώ ότι η παραπάνω σχέση επιτρέπει το μετασχηματισμό γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε απλές αλγεβρικές εξισώσεις στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη τις αρχικές συνθήκες για την $f(t)$. Αυτή ακριβώς η ιδιότητα χρησιμοποιείται για την απλοποίηση της εύρεσης της απόκρισης των κυκλωμάτων και συγκεκριμένα με τη μετατροπή των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις στο πεδίο Laplace.

Παράδειγμα 14.8 Να επιλυθεί η ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 6\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 10e^{-2t}u(t)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0^-)=4$ και $\dfrac{dx(0^-)}{dt} = -2$.

Λύση

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και στις δυο πλευρές της διαφορικής εξίσωσης:

$$\left[s^2\mathbf{X}(s) - sx(0^-) - \frac{dx(0^-)}{dt}\right] + 6\left[s\mathbf{X}(s) - x(0^-)\right] + 5\mathbf{X}(s) = \frac{10}{s+2}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$s^2\mathbf{X}(s) - 4s + 2 + 6s\mathbf{X}(s) - 24 + 5\mathbf{X}(s) = \frac{10}{s+2}$$

ή

$$\mathbf{X}(s)\left(s^2 + 6s + 5\right) = \frac{10}{s+2} + 4s + 22$$

Με επίλυση ως προς $\mathbf{X}(s)$ βρίσκουμε:

$$\mathbf{X}(s) = \frac{2(s+3)(2s+9)}{(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{7}{s+1} - \frac{10/3}{s+2} + \frac{1/3}{s+5}$$

οπότε

$$x(t) = \left(7e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t)$$

Παράδειγμα 14.9 Να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u(t)$$

$$2\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) + 3\frac{dy(t)}{dt} = 2e^{-t}u(t)$$

με αρχικές συνθήκες $x(0^-) = 1$ και $y(0^-) = -1$.

Λύση

Μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις στο πεδίο Laplace:

$$s\mathbf{X}(s) - x(0^-) + 2s\mathbf{Y}(s) - 2y(0^-) + 2\mathbf{Y}(s) = \frac{5}{s}$$

$$2s\mathbf{X}(s) - 2x(0^-) + 5\mathbf{X}(s) + 3s\mathbf{Y}(s) - 3y(0^-) = \frac{2}{s+1}$$

Αντικαθιστούμε τις αρχικές τιμές, οπότε παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς $\mathbf{X}(s)$ και $\mathbf{Y}(s)$:

$$s\mathbf{X}(s) + (2s+2)\mathbf{Y}(s) = \frac{5}{s} - 1$$

$$(2s+5)\mathbf{X}(s) + 3s\mathbf{Y}(s) = \frac{2}{s+1} - 1$$

Λύνουμε ως προς $\mathbf{X}(s)$ και $\mathbf{Y}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = \frac{s-13}{s^2+14s+10}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{-s^3+2s^2+30s+25}{s(s+1)(s^2+14s+10)}$$

Αναλύουμε τις παραπάνω σχέσεις σε μερικά κλάσματα (δες σχετικό εδάφιο στο κεφάλαιο αυτό):

$$\mathbf{X}(s) = \frac{-1.101}{(s+0.755)} + \frac{2.101}{(s+13.245)}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{5}{2s} - \frac{2}{3(s+1)} - \frac{1.697}{(s+0.755)} - \frac{1.136}{(s+13.245)}$$

Παίρνουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και βρίσκουμε τελικά ότι

$$x(t) = \left(-1.101e^{-0.755t} + 2.101e^{-13.245t}\right)u(t)$$

$$y(t)=\left(2.5-\frac{2}{3}e^{-t}-1.697e^{-0.755t}-1.136e^{-13.245t}\right)u(t)$$

Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

Ο μετασχηματισμός Laplace του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου ισούται με το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης προς τη μιγαδική συχνότητα s.

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{\mathbf{F}(s)}{s} \tag{14.47}$$

Για την απόδειξη ξεκινάμε από τον ορισμό:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]=-\frac{e^{-st}}{s}\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\Bigg|_{0^-}^{\infty}+\frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(\tau)d\tau$$

Όμως $e^{-st}\to 0$ καθώς το $t\to\infty$ και επίσης

$$\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\Bigg|_{t=0^-}=0$$

Επομένως

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{\mathbf{F}(s)}{s}$$

Παράδειγμα 14.10 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας συνάρτησης κλίσης $r(t)=tu(t)$.

Λύση

Η συνάρτηση $r(t)$ σχετίζεται με τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση $u(t)$ με τη σχέση

$$r(t)=tu(t)=\int_{0^-}^{t} u(t)dt$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}[r(t)]=\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau\right]=\frac{\mathcal{L}[u(t)]}{s}=\frac{1}{s^2}$$

Παράδειγμα 14.11 Το ρεύμα $i(t)$ σε ένα κύκλωμα καθορίζεται από την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

όπου R,C εκφράζουν αντίσταση και χωρητικότητα, αντίστοιχα. Βρείτε το $i(t)$ όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και η τάση που τροφοδοτεί το κύκλωμα έχει τη μορφή

$$v(t)=\begin{cases} 0, & 0<t<2 \\ e^{-t}, & t>2 \end{cases}$$

Λύση

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της ολοκληρωτικής εξίσωσης:

$$R\mathbf{I}(s)+\frac{1}{sC}\mathbf{I}(s)=\mathbf{V}(s)$$

Λύνοντας ως προς $\mathbf{I}(s)$ βρίσκουμε

$$\mathbf{I}(s)=\frac{1}{R}\frac{s\mathbf{V}(s)}{s+\frac{1}{RC}}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της πηγής τάσης δίνει

$$v(t)=e^{-t}u(t-2)\Rightarrow \mathbf{V}(s)=\int_{2}^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt=\int_{2}^{\infty} e^{-(s+1)t}dt=\left.\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right|_{2}^{\infty}=\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}$$

Αντικαθιστούμε τη $\mathbf{V}(s)$ στο $\mathbf{I}(s)$ και έχουμε

$$\mathbf{I}(s)=\frac{1}{R}\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}=\frac{\frac{C}{(RC-1)}}{s+1}e^{-2(s+1)}-\frac{\frac{1}{R(RC-1)}}{s+\frac{1}{RC}}e^{-2(s+1)}$$

οπότε

$$i(t)=\frac{C}{(RC-1)}e^{-t}u(t-2)-\frac{e^{-2}}{R(RC-1)}e^{-\frac{(t-2)}{RC}}u(t-2)$$

$$\Rightarrow i(t)=\left(\frac{RCe^{-t}-e^{-\frac{t-2}{RC}-2}}{R(RC-1)}\right)u(t-2)$$

Διαφόριση στο μιγαδικό επίπεδο

Η παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας αντιστοιχίζεται με το αρνητικό του μετασχηματισμού Laplace του γινομένου της $f(t)$ με το t. Δηλαδή

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d\mathbf{F}(s)}{ds} \tag{14.48}$$

Η ιδιότητα αυτή καλείται και **ιδιότητα μιγαδικής διαφόρισης** (complex differentiation property) και αποδεικνύεται ως εξής

$$\frac{d\mathbf{F}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\left[-te^{-st}\right]dt = -\int_{0^-}^{\infty} tf(t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

Παράδειγμα 14.12 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = Kte^{-at}u(t),\ a > 0$.

Λύση

Είναι

$$\mathcal{L}[Kte^{-at}u(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[Ke^{-at}u(t)\right] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{K}{s+a}\right) = \frac{K}{(s+a)^2}$$

Ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο

Η ιδιότητα αυτή εκφράζεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(\lambda)d\lambda \tag{14.49}$$

Για την απόδειξη της ανωτέρω σχέση ξεκινούμε από τον ορισμό της $\mathbf{F}(\lambda)$:

$$\mathbf{F}(\lambda) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-\lambda t}dt$$

Συνεπώς

$$\int_{s}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-\lambda t}dtd\lambda = \int_{s}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)d\lambda$$

Αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)\left[\int_{s}^{\infty} e^{-\lambda t} d\lambda\right] dt = \int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

Όμως

$$\int_{s}^{\infty} e^{-\lambda t} d\lambda = \left.\frac{e^{-\lambda t}}{-t}\right|_{s}^{\infty} = \frac{-1}{t}\left(e^{-\infty} - e^{-st}\right) = \frac{s^{-st}}{t}$$

Αν αντικαταστήσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτει πράγματι ότι

$$\int_{0-}^{\infty} f(t)\left[\int_{s}^{\infty} e^{-\lambda t} d\lambda\right] dt = \int_{0-}^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(\lambda) d\lambda$$

Παράδειγμα 14.13 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης.

$$f(t) = \frac{\sin(2t)}{t} u(t)$$

Λύση

Είναι

$$\mathcal{L}[\sin(2t)u(t)] = \frac{2}{s^2+4}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(2t)}{t} u(t)\right] = \int_{s}^{\infty} \frac{2}{\lambda^2+4} d\lambda$$

Γνωρίζουμε ότι για $a > 0$ ισχύει η σχέση

$$\int \frac{1}{\lambda^2+a^2} d\lambda = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(2t)}{t} u(t)\right] = \int_{s}^{\infty} \frac{2}{\lambda^2+4} d\lambda = \left.\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|_{s}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{\sin(2t)}{t} u(t)\right] = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$$

Μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου

Η μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου μιας συνάρτησης $f(t)$ προς τα δεξιά κατά a ($a > 0$) μας δίνει τη συνάρτηση $f(t-a)u(t-a)$. Αν λοιπόν $\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s)$ τότε

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}\mathbf{F}(s), \quad a > 0 \tag{14.50}$$

Δηλαδή, η μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου προς τα δεξιά κατά a αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με την εκθετική συνάρτηση e^{-as} στο πεδίο της συχνότητας. Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής γίνεται ως εξής

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt = \int_{a^-}^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt$$

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή $x = t-a$ οπότε $x = 0$ όταν $t = a$ και $x \to \infty$ όταν $t \to \infty$. Συνεπώς

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)}dx = e^{-sa}\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-sx}dx = e^{-as}\mathbf{F}(s)$$

Παράδειγμα 14.14 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

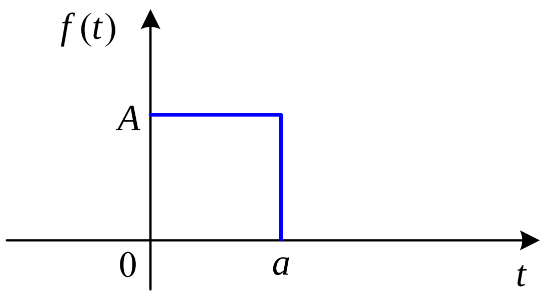
$$f(t) = (t-2)u(t-2)$$

Λύση

Είναι

$$\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}[(t-2)u(t-2)] = e^{-2s}\mathcal{L}\left[tu(t)\right] = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Παράδειγμα 14.15 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του τετραγω-νικού παλμού του Σχήματος 14.7.



Σχήμα 14.7 Τετραγωνικός παλμός.

Λύση

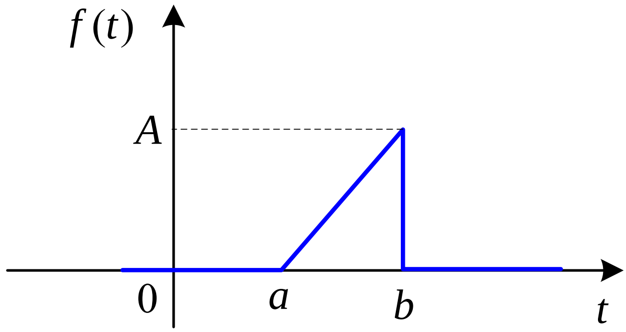
Η συνάρτηση $f(t)$ γράφεται ως

$$f(t) = Au(t) - Au(t-a)$$

Συνεπώς

$$\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}[Au(t)] - \mathcal{L}[Au(t-a)] = A\frac{1}{s} - A\frac{1}{s}e^{-as} = \frac{A}{s}\left(1-e^{-as}\right)$$

Παράδειγμα 14.16 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του τριγωνικού παλμού του Σχήματος 14.8.



Σχήμα 14.8 Μετατοπισμένος τριγωνικός παλμός.

Λύση

Αν $r(t)=tu(t)$ τότε η συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(t)=Ar(t-a)-Ar(t-b)-Au(t-b)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μετατόπισης βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s)&=\mathcal{L}[Ar(t-a)]-\mathcal{L}[Ar(t-b)]-\mathcal{L}[Au(t-b)]\\&=A\frac{1}{s^2}e^{-as}-A\frac{1}{s^2}e^{-bs}-A\frac{1}{s}e^{-bs}\\&=\frac{A}{s^2}\left(e^{-as}-e^{-bs}-se^{-bs)}\right)\end{aligned}$$

Μετατόπιση στο πεδίο της συχνότητας

Αν $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\mathbf{F}(s)$ τότε

$$\mathbf{F}(s-a)=\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right],\quad a>0 \qquad (14.51)$$

Δηλαδή, η μετατόπιση στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας προς τα δεξιά κατά a αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με την εκθετική συνάρτηση e^{at} της συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου.

Για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής έχουμε:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=\int_{0^-}^{\infty}e^{at}f(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt=\mathbf{F}(s-a)$$

Παράδειγμα 14.17 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης.

$$f(t)=e^{-3t}\cos(2t)u(t)$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}\left[\cos(2t)u(t)\right]=\frac{s}{s^2+4}$$

οπότε

$$\mathcal{L}\left[e^{-3t}\cos(2t)u(t)\right]=\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

Χρονική κλιμάκωση

Αν $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\mathbf{F}(s)$ τότε

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right),\ a>0 \tag{14.52}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη συστημάτων στα οποία υπάρχει κλιμάκωση του χρόνου.

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται ως εξής

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right]=\int_{0^-}^{\infty} f(at)e^{-st}dt$$

Αν θέσουμε $x=at$ τότε $dx=adt$ και

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right]=\int_{0^-}^{\infty} f(at)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-(x/a)s}\frac{dx}{a}=\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right),\quad a>0$$

Παράδειγμα 14.18 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης.

$$f(t)=\delta(2t)+5e^{-3t}u(3t)$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1 \text{ και } \mathcal{L}\left[5e^{-t}u(t)\right]=\frac{5}{s+1}$$

οπότε

$$\mathcal{L}\left[\delta(2t)+5e^{-3t}u(3t)\right]=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\frac{1}{\frac{s}{3}+1}=\frac{1}{2}+\frac{5}{s+3}$$

Αποκοπή μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου

Αν πολλαπλασιάσουμε μια συνάρτηση $f(t)$ με $u(t-t_0)$ τότε αποκόπτεται (μηδενίζεται) το τμήμα της συνάρτησης από 0 έως t_0. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t+t_0)] \tag{14.53}$$

Για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής ξεκινάμε από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)u(t-t_0)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)u(t-t_0)e^{-st}dt$$

Αν θέσουμε $x = t - t_0$ τότε $dx = dt$ και

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t)u(t-t_0)e^{-st}dt = \int_{-t_0}^{\infty} f(x+t_0)u(x)e^{-s(x+t_0)}dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(x+t_0)e^{-s(x+t_0)}dx = e^{-t_0 s}\int_{0}^{\infty} f(x+t_0)e^{-sx}dx$$

$$= e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t+t_0)]$$

Παράδειγμα 14.19 Βρείτε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = tu(t-2)$$

Λύση

Είναι

$$\mathcal{L}[tu(t-2)] = e^{-2s}\mathcal{L}[t+2] = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)$$

Στον Πίνακα 14.2 παρουσιάζονται περιληπτικά οι σπουδαιότερες από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Πρέπει να σημειώσουμε ότι εκτός από τις ιδιότητες που αναπτύξαμε παραπάνω, στη συνέχεια θα εξετάσουμε αναλυτικά και ιδιαίτερα ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές που είναι πολύ σημαντικές για την ανάλυση και την κατανόηση της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων αλλά γενικότερα των γραμμικών συστημάτων.

Πίνακας 14.2 Ιδιότητες και θεωρήματα του Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα/ Θεώρημα	$f(t)$	$\mathbf{F}(s)$
Πολλαπλασιασμός με μια σταθερά	$Kf(t)$	$K\mathbf{F}(s)$
Γραμμικότητα	$K_1f_1(t)+K_2f_2(t)+K_3f_3(t)+\dots$	$K_1\mathbf{F}_1(s)+K_2\mathbf{F}_2(s)+K_3\mathbf{F}_3(s)+\dots$
Διαφόριση	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$s\mathbf{F}(s)-f(0-)$
Παράγωγος n βαθμού	$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n\mathbf{F}(s)-s^{n-1}f(0^-)-\dots-f^{(n-1)}(0^-)$
Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου	$\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau$	$\dfrac{\mathbf{F}(s)}{s}$
Διαφόριση στο μιγαδικό επίπεδο	$tf(t)$	$-\dfrac{d\mathbf{F}(s)}{ds}$
Ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty}\mathbf{F}(\lambda)d\lambda$
Μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου	$f(t-a)u(t-a),\ \ a>0$	$e^{-as}\mathbf{F}(s)$
Μετατόπιση στο πεδίο της συχνότητας	$e^{at}f(t),\ \ a>0$	$\mathbf{F}(s-a)$
Χρονική κλιμάκωση	$f(at),\ \ a>0$	$\dfrac{1}{a}\mathbf{F}\left(\dfrac{s}{a}\right)$

Αποκοπή μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου	$f(t)u(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t+t_0)]$
Θεώρημα αρχικής τιμής	$\lim_{t\to 0^+} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} s\mathbf{F}(s)$
Θεώρημα της τελικής τιμής	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} s\mathbf{F}(s)$
Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου	$f*g=\int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$	$\mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s)$
Συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας	$f(t)g(t)$	$\mathbf{F}*\mathbf{G}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega}\mathbf{F}(s-\lambda)\mathbf{G}(\lambda)d\lambda$ $\sigma_g<c<\sigma-\sigma_f$
Περιοδική συνάρτηση	$f(t+T)$, $f_1(t)=\begin{cases} f(t), 0\le t<T \\ 0, \text{αλλού}\end{cases}$	$\mathbf{F}(s)=\frac{\mathbf{F}_1(s)}{1-e^{-Ts}}$

14.5 Τα θεωρήματα της αρχικής και της τελικής τιμής

Τα θεωρήματα της αρχικής και της τελικής τιμής είναι πολύ χρήσιμα διότι μας επιτρέπουν να προσδιορίζουμε άμεσα από την $\mathbf{F}(s)$ την τιμή και τη συμπεριφορά της $f(t)$ για $t=0^+$ και $t\to\infty$. Αν η $\mathbf{F}(s)$ αντιπροσωπεύει την απόκριση ενός κυκλώματος στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας, τότε μπορούμε με τα θεωρήματα αυτά να βρούμε την απόκριση στην αρχή του χρόνου λειτουργίας καθώς και στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του κυκλώματος χωρίς να χρειαστεί να αντιστρέφουμε στο πεδίο του χρόνου για να προσδιορίζουμε την $f(t)$.

14.5.1 Θεώρημα αρχικής τιμής

Το ***θεώρημα της αρχικής τιμής*** μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε την αρχική τιμή της συνάρτησης $f(t)$, δηλαδή την τιμή $\lim_{t\to 0^+} f(t)$, από την οριακή τιμή της $s\mathbf{F}(s)$ καθώς το s τείνει στο ∞, δηλαδή

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{s\to\infty} s\mathbf{F}(s) \tag{14.54}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση απαιτείται όπως τόσο η $f(t)$ όσο και η $f'(t)$ να έχουν μετασχηματισμό Laplace. Αυτό μεταφράζεται στο ότι η συνάρτηση $f(t)$ πρέπει να είναι συνεχής και να μην περιέχει κρουστικές συναρτήσεις (ή να περιέχει το πολύ μια κρουστική συνάρτηση στο $t=0$).

Για την απόδειξη του θεωρήματος ξεκινάμε από τον μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt = s\mathbf{F}(s)-f(0^-) \tag{14.55}$$

Παίρνουμε τώρα το όριο καθώς $s\to\infty$:

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt=\lim_{s\to\infty}\left(s\mathbf{F}(s)-f(0^-)\right) \tag{14.56}$$

Το αριστερό μέρος της ανωτέρω σχέσης γράφεται ως

$$\lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+}\frac{df}{dt}e^{0}dt+\int_{0^+}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt\right) \tag{14.57}$$

Όμως, για $s\to\infty$ έχουμε $\lim_{s\to\infty}\left(\frac{df}{dt}e^{-st}\right)\to 0$, οπότε

$$\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt = f(0^+)-f(0^-) \tag{14.58}$$

Επειδή το $f(0^-)$ είναι ανεξάρτητο του s, το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (14.56) γράφεται ως

$$\lim_{s\to\infty}\left(s\mathbf{F}(s)-f(0^-)\right)=\lim_{s\to\infty}\left(s\mathbf{F}(s)\right)-f(0^-) \tag{14.59}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (14.58) και (14.59) παίρνουμε

$$\lim_{s\to\infty}s\mathbf{F}(s)=f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}f(t) \tag{14.60}$$

που αποδεικνύει την ορθότητα του θεωρήματος της αρχικής τιμής.

Παράδειγμα 14.20 Να βρεθεί η αρχική τιμής $f(0^+)$ της συνάρτησης $f(t)$ που έχει μετασχηματισμό Laplace.

$$\mathbf{F}(s)=\frac{s(s+2)}{s^3+3s+1}$$

Λύση

Η εφαρμογή του θεωρήματος της αρχικής τιμής δίνει

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty} s\mathbf{F}(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2(s+2)}{s^3+3s+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{1+\frac{2}{s}}{1+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s^3}}=1$$

και συνεπώς $f(0^+)=1$.

14.5.2 Θεώρημα τελικής τιμής

Το θεώρημα της τελικής τιμής διατυπώνεται ως εξής:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} s\mathbf{F}(s) \tag{14.61}$$

με την προϋπόθεση ότι οι ρίζες του παρονομαστή της $\mathbf{F}(s)$ (οι πόλοι) βρίσκονται στο αριστερό μέρος του μιγαδικού επιπέδου. Η απόδειξη του θεωρήματος ξεκινά και πάλι από τη σχέση μετασχηματισμού της παραγώγου:

$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt = s\mathbf{F}(s)-f(0^-) \tag{14.62}$$

Παίρνοντας το όριο για $s\to 0$ έχουμε

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt=\lim_{s\to 0}[s\mathbf{F}(s)-f(0^-)] \tag{14.63}$$

Το πρώτο μέρος για $s\to 0$ γίνεται

$$\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df}{dx}dx=f(\infty)-f(0^-) \tag{14.64}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (14.62) και (14.64) προκύπτει

$$f(\infty)-f(0^-)=\lim_{s\to 0} sF(s)-f(0^-) \tag{14.65}$$

και τελικά

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\mathbf{F}(s) \tag{14.66}$$

Το θεώρημα της τελικής τιμής είναι εξαιρετικά χρήσιμο στην ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων γιατί μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε από την $\mathbf{F}(s)$ τη μορφή της απόκριση στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.

Παράδειγμα 14.21 Η τάση που εκφράζει την απόκριση ενός κυκλώματος έχει τον ακόλουθο μετασχηματισμό Laplace.

$$\mathbf{V}(s) = \frac{20(s+2)}{s(s^2+4s+5)}$$

Να προσδιοριστεί η τιμή της τάσης $v(t)$ στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας του κυκλώματος.

Λύση

Οι πόλοι της $\mathbf{V}(s)$ είναι $s_1 = 0$ και $s_{2,3} = -2 \pm j$, δηλαδή $\mathrm{Re}[s_i] \le 0$, $i = 1,2,3$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα της τελικής τιμής:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} s\mathbf{V}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{20(s+2)}{(s^2+4s+5)} = 8\,\mathrm{V}$$

Πράγματι, η τάση στο πεδίο του χρόνου έχει τη μορφή

$$v(t) = \left(8 - 8e^{-2t}\cos(t) + 4e^{-2t}\sin(t)\right)u(t)\,\mathrm{V}$$

και $\lim_{t\to\infty} v(t) = 8\,\mathrm{V}$.

Παράδειγμα 14.22 Δίνεται η $f(t) = 10e^{2t}u(t)$. Να εξεταστεί αν μπορεί να υπολογιστεί η οριακή τιμή $f(\infty)$.

Λύση

Προφανώς $\lim_{t\to\infty} 10e^{2t} \to \infty$. Όμως, αν πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace της $f(t)$ είναι

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{10}{s-2}$$

και

$$\lim_{s\to 0} \frac{10s}{s-2} = 0$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στην περίπτωση αυτή, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα της τελικής τιμής και αυτό γιατί ο πόλος $s = 2$ δεν ανήκει στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

14.5.3 Το θεώρημα της συνέλιξης

Όπως γνωρίζουμε και από τη θεωρία των Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων Ι, η ***συνέλιξη*** (*convolution*) μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε την απόκριση ενός κυκλώματος, με μηδενικές αρχικές φορτίσεις, όταν είναι γνωστή η διέγερση και η κρουστική του απόκριση. Γενικά, η συνέλιξη παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των γραμμικών συστημάτων. Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$ συμβολίζεται ως $h = f * g$ και εκφράζεται από τη σχέση

$$h(t) = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \tag{14.67}$$

Συμβολικά γράφουμε

$$h = f * g = g * f \tag{14.68}$$

Το θεώρημα της συνέλιξης καθορίζει ότι αν $\mathcal{L}[h(t)] = \mathbf{H}(s)$, $\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s)$ και $\mathcal{L}[g(t)] = \mathbf{G}(s)$ τότε

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) \tag{14.69}$$

Δηλαδή, στο πεδίο της συχνότητας ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπει τη συνέλιξη σε πολλαπλασιασμό .

Απόδειξη

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης των δύο συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_{t=0^-}^{\infty} \left[\int_{\lambda=0}^{t} f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right] e^{-st}dt \tag{14.70}$$

Επειδή

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1, \lambda < t \\ 0, \lambda > t \end{cases} \tag{14.71}$$

η σχέση (14.70) μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_{t=0^-}^{\infty} \left[\int_{\lambda=0}^{t} f(t-\lambda)u(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right] e^{-st}dt \tag{14.72}$$

Αλλάζοντας τη σειρά των ολοκληρωμάτων έχουμε

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_{\lambda=0}^{\infty} g(\lambda) \left[\int_{t=0}^{t} f(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}dt \right] d\lambda \tag{14.73}$$

Το ολοκλήρωμα μέσα στην αγκύλη δεν είναι τίποτε άλλο από το μετασχηματισμό Laplace της $f(t-\lambda)u(t-\lambda)u(t)$. Σύμφωνα λοιπόν με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_{\lambda=0}^{\infty} g(\lambda)\mathbf{F}(s)e^{-s\lambda}d\lambda = \mathbf{F}(s)\int_{\lambda=0}^{\infty} g(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda \tag{14.74}$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathbf{H}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{G}(s) \tag{14.75}$$