ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

Μέθοδοι Κόμβων και Βρόχων

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε τις δύο κύριες μεθόδους ανάλυσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων, δηλαδή τη μέθοδο των κόμβων και τη μέθοδο των βρόχων. Από τις δύο αυτές μεθόδους η πλέον γενική είναι η μέθοδος των κόμβων.

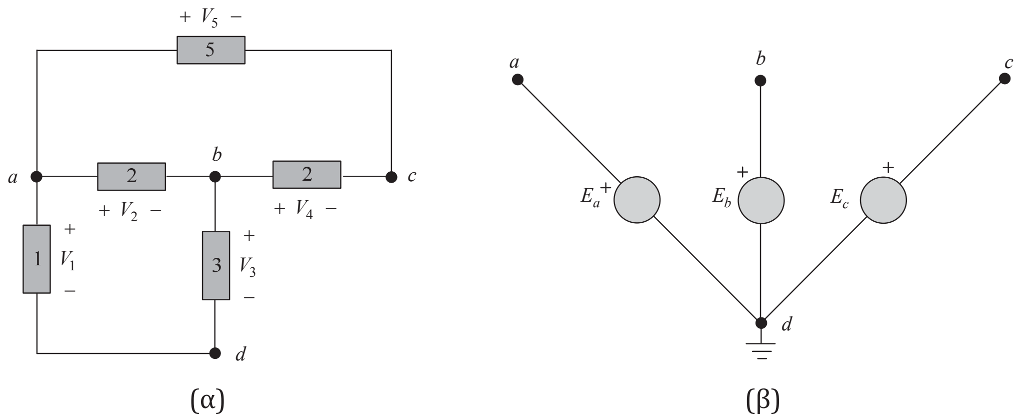
Η ανάπτυξη των μεθόδων γίνεται με τη χρησιμοποίηση μόνον ωμικών κυκλωμάτων. Αυτό έχει γίνει χάριν απλότητας καθόσον οι μεθοδολογίες επεκτείνονται εύκολα και στην ανάλυση μη ωμικών κυκλωμάτων. Επιπλέον, στα επόμενα κεφάλαια, θα γίνεται συστηματική επεξήγηση του τρόπου χρησιμοποίησης των μεθόδων αυτών στην ανάλυση των επιμέρους κυκλωμάτων.

Σημειώνεται τέλος, ότι στο Κεφάλαιο 6 θα αναπτυχθούν, εκτός των άλλων, οι κατάλληλες μορφές των δύο μεθόδων για την επίλυση κυκλωμάτων με υπολογιστή. Για το λόγο αυτό δεν αναπτύσσονται στο κεφάλαιο αυτό ορισμένα τοπολογικά χαρακτηριστικά των κυκλωμάτων (δες Κεφάλαιο 6) που θα ήταν χρήσιμα για την παραπέρα κατανόηση των μεθόδων.

3.2 Τάσεις κόμβων

Θεωρούμε ένα κύκλωμα που αποτελείται από n κόμβους και b κλάδους. Στην ενότητα αυτή θα καθορίσουμε τι σημαίνει τάση κόμβου και πως αυτή αντιστοιχίζεται στη μορφή ενός συγκεκριμένου κυκλώματος. Αν σε ένα κύκλωμα έχει καθοριστεί ένας κόμβος ως κόμβος αναφοράς, τότε η τάση του κόμβου k ισούται με τη διαφορά δυναμικού του κόμβου k ως προς τον κόμβο αναφοράς. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.l(α) έστω ότι καθορίζουμε τον κόμβο d ως τον κόμβο αναφοράς. Το κύκλωμα αυτό έχει $n = 4$ κόμβους και $b = 5$ κλάδους. Καθορίζοντας έναν κόμβο, ως κόμβο αναφοράς, απομένουν $n-1=3$ τάσεις κόμβων. Έχουμε δηλαδή ένα ισοδύναμο κύκλωμα όπως αυτό του Σχήματος 3.1(β), όπου ιδανικά βολτόμετρα είναι συνδεδεμένα ανάμεσα στους κόμβους και τον κόμβο αναφοράς. Στο κύκλωμα αυτό, για απλότητα, δεν παρουσιάζονται οι κλάδοι. Οι τάσεις των κόμβων a, b και c συμβολίζονται με E_a, E_b και E_c, αντίστοιχα.

Το σύμβολο E χρησιμοποιείται σε αντίθεση με το V για να τονίσει ότι οι τάσεις E εκφράζουν τάσεις κόμβων και όχι αναγκαστικά τάσεις κλάδων. Αυτό γίνεται φανερό αν παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει κλάδος που να συνδέει τους κόμβους c και d. Σημειώνεται ότι η τάση του κόμβου αναφοράς θεωρείται συνήθως ίση με μηδέν.



Σχήμα 3.1 Τάσεις κόμβων.

Από τη σύγκριση των κυκλωμάτων του Σχήματος 3.1, παρατηρούμε ότι το κύκλωμα του Σχήματος 3.1(β) δεν περιέχει βρόχους. Όμως, εύκολα προκύπτουν εξισώσεις που συνδέουν τις τάσεις E με τις τάσεις των κλάδων του κυκλώματος του Σχήματος 3.l(α). Με τη δεδομένη προσήμανση των δύο σχημάτων, οι εξισώσεις αυτές έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} V_1 &= E_a \\ V_2 &= E_a - E_b \\ V_3 &= E_b \\ V_4 &= E_b - E_c \\ V_5 &= E_a - E_c \end{aligned} \tag{3.1}$$

Επειδή ένας κλάδος συνδέει πάντα δύο κόμβους, κάθε τάση κλάδου μπορεί να εκφραστεί ως η διαφορά των τάσεων των κόμβων που ο κλάδος συνδέει. Το γεγονός αυτό θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την ανάπτυξη γενικών μεθόδων επίλυσης κυκλωμάτων.

Είναι φανερό ότι ο καθορισμός του κόμβου αναφοράς επηρεάζει άμεσα τη μορφή των εξισώσεων. Ο καθορισμός λοιπόν του κόμβου αναφοράς, αν και μπορεί να γίνει τυχαία για οποιοδήποτε κύκλωμα, καλό είναι να επιλέγεται με βάση ορισμένα κριτήρια, που ως στόχο έχουν την απλότητα της ανάλυσης και την εκμετάλλευση της μορφής των κυκλωμάτων. Τα κριτήρια αυτά θα αναφερθούν στο επόμενο εδάφιο στο οποίο περιγράφεται η ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων με τη μέθοδο των κόμβων.

3.3 Η μέθοδος των κόμβων

Στο προηγούμενο εδάφιο είδαμε ότι σε ένα κύκλωμα με n κόμβους έχουμε $n-1$ άγνωστες τάσεις κόμβων. Μια τάση ορίζεται πάντα ως η πιθανή διαφορά μεταξύ δύο σημείων. Όταν μιλάμε για την τάση σε ένα ορισμένο σημείο ενός κυκλώματος υπονοούμε ότι η μέτρηση εκτελείται μεταξύ εκείνου του σημείου και κάποιου άλλου σημείου στο κύκλωμα. Στις περισσότερες περιπτώσεις το άλλο σημείο αναφέρεται ως κόμβος αναφοράς και έτσι όλες οι τάσεις των κόμβων καθορίζονται ως προς τον κόμβο αναφοράς που προεπιλέγεται. Για την ανάλυση των κυκλωμάτων αυτών μπορούμε να προσδιορίσουμε $n-1$ ανεξάρτητες εξισώσεις στις οποίες οι τάσεις των κόμβων να είναι οι προς προσδιορισμό άγνωστες μεταβλητές. Η διαδικασία εύρεσης των εξισώσεων αυτών είναι γνωστή ως ***μέθοδος των κόμβων***. Πρέπει να σημειώσουμε ότι αρχικά θεωρούμε ότι οι τάσεις στους κόμβους είναι θετικές ως προς τον κόμβο αναφοράς. Αν αυτό δεν συμβαίνει θα φανεί στο τέλος με την εύρεση των πραγματικών τιμών.

Η μέθοδος των κόμβων είναι μια πολύ ισχυρή τεχνική για την ανάλυση των κυκλωμάτων και είναι βασισμένη στην εφαρμογή των NPK, NTK καθώς και του νόμου του Ohm. Η μέθοδος των κόμβων είναι γενική, δηλαδή μπορεί να εφαρμοστεί στη πλειονότητα των κυκλωμάτων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μέθοδος αυτή διαφοροποιείται ελάχιστα στην περίπτωση που έχουμε ανεξάρτητες πηγές τάσης ή εξαρτημένες πηγές. Τις περιπτώσεις αυτές θα τις αντιμετωπίσουμε ξεχωριστά στη συνέχεια.

Η διαδικασία επίλυσης ενός κυκλώματος με τη μέθοδο των κόμβων ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Βήμα 1ο Προσδιορίζουμε με προσοχή όλους τους κόμβους του κυκλώματος.

Βήμα 2ο Καθορίζουμε τον κόμβο αναφοράς του κυκλώματος και θεωρούμε ότι αυτός έχει μηδενική τιμή τάσης.

Βήμα 3ο Καθορίζουμε αυθαίρετα τα ρεύματα των κλάδων και αριθμούμε τους $n-1$ κόμβους έτσι ώστε σε κάθε κόμβο k να αντιστοιχεί η κομβική τάση E_k.

Βήμα 4ο Εφαρμόζουμε το ΝΡΚ σε όλους τους κόμβους εκτός από τον κόμβο αναφοράς.

Βήμα 5ο Με εφαρμογή του ΝΤΚ και του νόμου του Ohm προσδιορίζουμε τις εκφράσεις για τα ρεύματα των κλάδων συναρτήσει των κομβικών τάσεων.

Βήμα 6ο Αντικαθιστούμε τα ρεύματα των κλάδων που προέκυψαν από το Βήμα 5 στις εξισώσεις του Βήματος 4. Έτσι, προκύπτουν $n-1$ ανεξάρτητες γραμμικές εξισώσεις με μεταβλητές τις κομβικές τάσεις $E_i, i=1,2,...,n-1$.

Βήμα 7ο Επιλύουμε το σύστημα των $n-1$ γραμμικών εξισώσεων και προσδιορίζουμε τις κομβικές τάσεις.

Έχοντας προσδιορίσει τις τάσεις των κόμβων, το κύκλωμα θεωρείται ότι έχει επιλυθεί. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος προσδιορίζονται εύκολα ως συνάρτηση των κομβικών τάσεων. Έτσι, τα ρεύματα των κλάδων προσδιορίζονται από τις εξισώσεις του Βήματος 5 ενώ οι τάσεις των κλάδων προκύπτουν από εξισώσεις ανάλογες με τις Εξ. (3.1).

Όπως ήδη τονίστηκε, η επιλογή του κόμβου αναφοράς καλό είναι να γίνεται σύμφωνα με κριτήρια που σχετίζονται με την απλότητα της επίλυσης του κυκλώματος. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο κόμβος αναφοράς πρέπει να επιλέγεται ώστε:

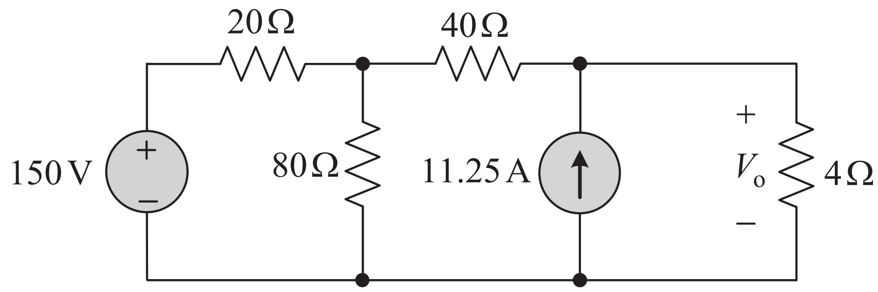
(α) Να συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους του κυκλώματος.

(β) Να συνδέεται με έναν μόνον κλάδο με τους περισσότερους από τους υπόλοιπους κόμβους του κυκλώματος.

(γ) Να αντιστοιχεί στον αρνητικό πόλο όσο το δυνατόν περισσοτέρων πηγών τάσεων.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε ορισμένα παραδείγματα για την πλήρη κατανόηση της μεθόδου.

Παράδειγμα 3.1 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.2 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων η τάση V_o.



Σχήμα 3.2

Λύση

Το κύκλωμα έχει τρεις κόμβους. Ορίζουμε ως κόμβο αναφοράς τον κόμβο που αντιστοιχεί στο αρνητικό πόλο της πηγής τάσης και καθορίζουμε αυθαίρετα τις φορές των ρευμάτων στους κλάδους. Έτσι παίρνουμε το κύκλωμα του Σχήματος 3.3 στο οποίο ο ΝΡΚ δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις στους δύο κόμβους:

κόμβος a: $I_1 = I_2 + I_3$

κόμβος b: $I_3 + 11.25 = I_o$

Προσδιορίζουμε τώρα τα ρεύματα των κλάδων συναρτήσει των τάσεων των δύο κόμβων:

$$I_1 = \frac{150 - E_a}{20}$$

$$I_2 = \frac{E_a}{80}$$

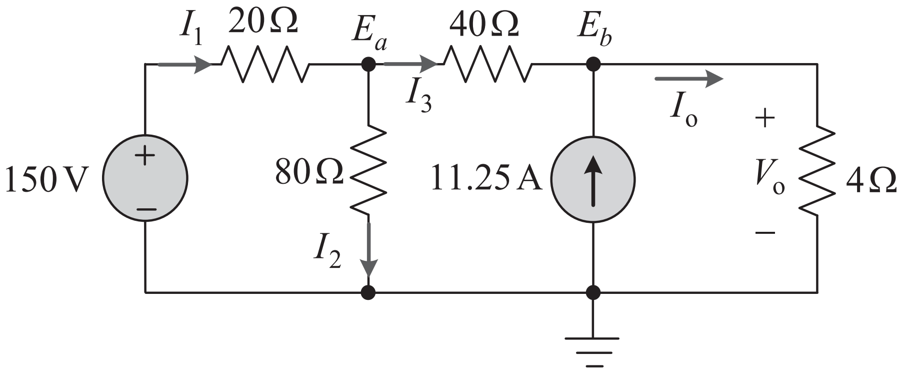
$$I_3 = \frac{E_a - E_b}{40}$$

$$I_o = \frac{E_b}{4}$$

Αντικαθιστούμε τις ανωτέρω εκφράσεις για τα ρεύματα στις δύο εξισώσεις των κόμβων και έχουμε:

$$\frac{150 - E_a}{20} = \frac{E_a}{80} + \frac{E_a - E_b}{40}$$

$$\frac{E_a - E_b}{40} + 11.25 = \frac{E_b}{4}$$



Σχήμα 3.3

Το ανωτέρω σύστημα γράφεται ως

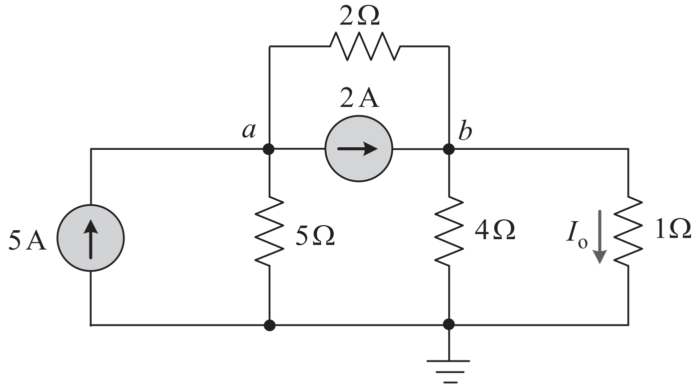
$$7E_a - 2E_b = 600$$

$$-2E_a + 22E_b = 900$$

Όπως παρατηρούμε, το σύστημα αυτό είναι συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο. Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι οι τάσεις των δύο κόμβων είναι ίσες με

$$E_a = 100\text{V} \quad \text{και} \quad E_b = V_o = 50\text{ V}$$

Παράδειγμα 3.2 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.4 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων το ρεύμα I_o.



Σχήμα 3.4

Λύση

Το κύκλωμα έχει τρεις κόμβους και ο ένας κόμβος έχει προκαθοριστεί ως κόμβος αναφοράς. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5 καθορίζουμε αυθαίρετα τα ρεύματα στους κλάδους. Οι εξισώσεις στους δύο κόμβους a και b έχουν τη μορφή:

κόμβος a: $I_1 + 2 = I_2 + 5 \Rightarrow I_1 - I_2 = 3$

κόμβος b: $I_o + I_2 + I_3 = 2$

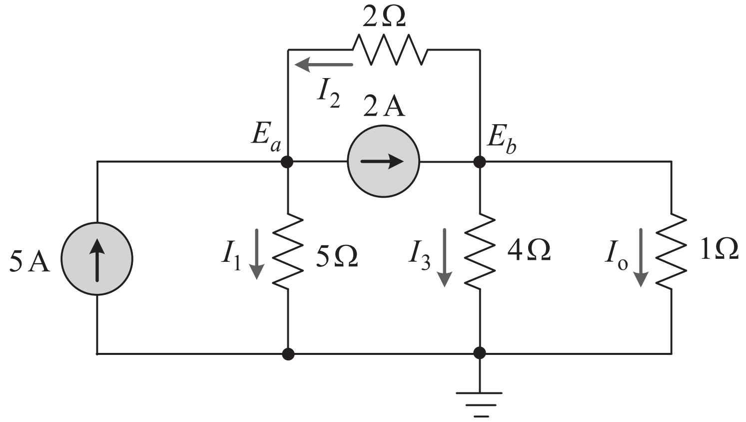
Βρίσκουμε τις εκφράσεις των ρευμάτων συναρτήσει των τάσεων των κόμβων E_a και E_b:

$$I_1 = \frac{E_a}{5}\,,\quad I_2 = \frac{E_b - E_a}{2}\,,\quad I_3 = \frac{E_b}{4}\quad \text{και}\quad I_o = \frac{E_b}{1}$$

Αντικαθιστούμε τα ρεύματα στις εξισώσεις των κόμβων και παίρνουμε:

$$\frac{E_a}{5} - \frac{E_b - E_a}{2} = 3 \Rightarrow 7E_a - 5E_b = 30$$

$$E_b + \frac{E_b - E_a}{2} + \frac{E_b}{4} = 2 \Rightarrow -2E_a + 7E_b = 8$$



Σχήμα 3.5

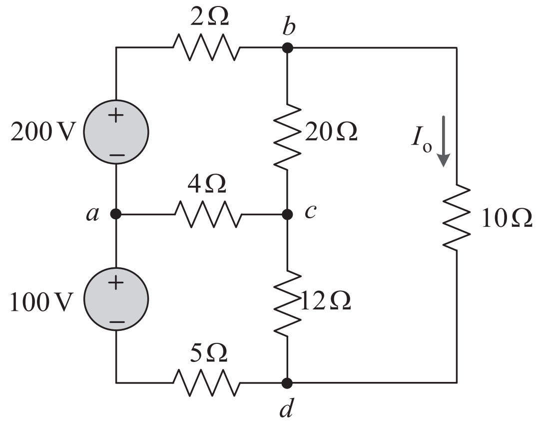
Λύνοντας το ανωτέρω, συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο, σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι οι τάσεις των δύο κόμβων είναι ίσες με

$$E_a = 6.410\text{V} \quad \text{και} \quad E_b = 2.974\text{ V}$$

Συνεπώς, το ζητούμενο ρεύμα έχει τιμή

$$I_o = \frac{E_b}{1} = 2.974\text{ A}$$

Παράδειγμα 3.3 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.6 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων το ρεύμα I_o.



Σχήμα 3.6

Λύση

Το κύκλωμα έχει τέσσερις κόμβους. Διαλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον κόμβο a και ορίζουμε τα ρεύματα κλάδων όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.7.

Οι εξισώσεις στους τρεις κόμβους είναι

κόμβος b: $I_1 = I_4 + I_o$

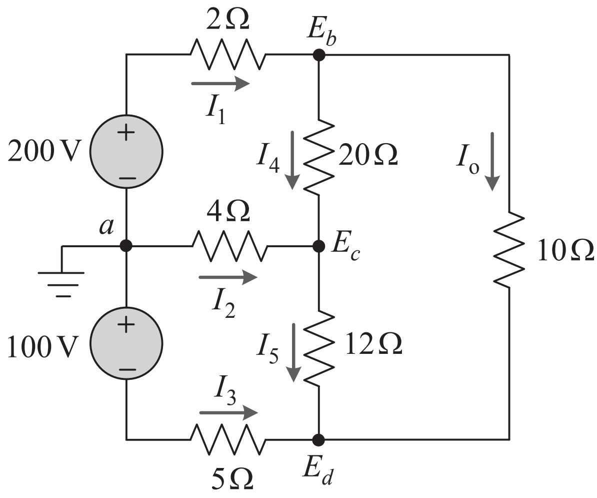
κόμβος c: $I_2 + I_4 = I_5$

κόμβος d: $I_o + I_3 + I_5 = 0$

Τα ρεύματα συναρτήσει των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_1 = \frac{200 - E_b}{2}\,,\quad I_2 = -\frac{E_c}{4}\,,\quad I_3 = \frac{-100 - E_d}{5}$$

$$I_4 = \frac{E_b - E_c}{20}\,,\quad I_5 = \frac{E_c - E_d}{12}\,,\quad I_{\mathrm{o}} = \frac{E_{\mathrm{b}} - E_d}{10}$$



Σχήμα 3.7

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κόμβων και έχουμε

$$\frac{200 - E_b}{2} = \frac{E_b - E_c}{20} + \frac{E_{\mathrm{b}} - E_d}{10}$$

$$-\frac{E_c}{4} + \frac{E_b - E_c}{20} = \frac{E_c - E_d}{12}$$

$$\frac{E_{\mathrm{b}} - E_d}{10} + \frac{-100 - E_d}{5} + \frac{E_c - E_d}{12} = 0$$

ή με τη μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_b \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε και πάλι τη συμμετρία του ανωτέρω συστήματος ως προς την κύρια διαγώνιο. Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι

$$E_b = 154.026\,\mathrm{V}\,,\quad E_c = 18.350\,\mathrm{V}\ \text{ και }\ E_d = -8.004\,\mathrm{V}$$

Συνεπώς

$$I_{\mathrm{o}} = \frac{E_{\mathrm{b}} - E_d}{10} = 16.203\,\mathrm{A}$$

3.3.1 Συστηματική γραφή των εξισώσεων κόμβων

Όπως είδαμε παραπάνω, η μέθοδος των εξισώσεων κόμβων, για κυκλώματα χωρίς εξαρτημένες πηγές, καταλήγει στην εύρεση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με άγνωστες μεταβλητές τις τάσεις των κόμβων. Έστω λοιπόν

$$\boldsymbol{GV} = \boldsymbol{I} \tag{3.2}$$

το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων, όπου

$V=[v_1,v_2,...,v_{n-1}]^T$ οι άγνωστες τάσεις των κόμβων

$I=[i_1,i_2,...,i_{n-1}]^T$ πίνακας ρευμάτων κλάδων

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{n-1,1} & \cdots & G_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$ πίνακας αγωγιμοτήτων

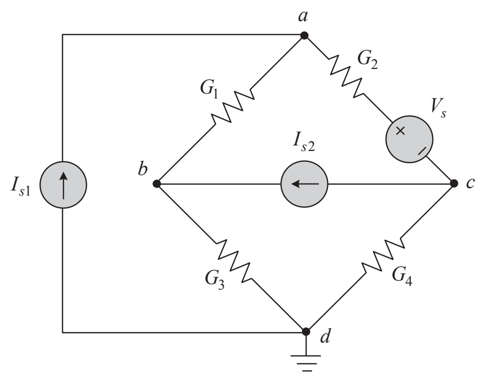
Ο πίνακας των αγωγιμοτήτων $\boldsymbol{G}$ είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του και τα στοιχεία του προσδιορίζονται ως εξής:

- Τα διαγώνια στοιχεία $\boldsymbol{G}_{m,m}$ είναι θετικά και ίσα με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων που ενώνονται με τον κόμβο m.
- Τα μη διαγώνια στοιχεία $\boldsymbol{G}_{n,m}$ είναι αρνητικά και ίσα με τις αρνητικές αγωγιμότητες που συνδέουν τους κόμβους n και m.

Ο πίνακας $\boldsymbol{I}$ των ρευμάτων κλάδων περιέχει τιμές που αντιστοιχούν στα ρεύματα των κλάδων που οφείλονται στις πηγές. Έτσι, η τιμή $\boldsymbol{I}_n$ είναι ίση με το συνολικό ρεύμα που εισέρχεται στον κόμβο n και το οποίο οφείλεται σε όλους τους κλάδους που περιέχουν πηγές και συνδέονται με αυτόν. Θετικό είναι το εισερχόμενο ρεύμα και αρνητικό το εξερχόμενο.

Εδώ πρέπει να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις. Στην περίπτωση ύπαρξης κλάδου όπου υπάρχει πηγή ρεύματος σε σειρά με αντιστάσεις ή/και σε πηγές τάσεις, ο κλάδος αυτός (όπως θα δειχτεί στο επόμενο κεφάλαιο) είναι ισοδύναμος με έναν κλάδο που περιέχει μόνον την πηγή ρεύματος. Επίσης, η μέθοδος αυτή δεν ενδείκνυται στην περίπτωση ύπαρξης υπερκόμβου, δηλαδή όταν δύο κόμβοι συνδέονται άμεσα μέσω μιας πηγής τάσης.

Παράδειγμα 3.4 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.8: (α) Να γραφούν με τη συστηματική μεθοδολογία οι εξισώσεις των κόμβων. (β) Αν $R_1=1\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=0.5\Omega$, $I_{s1}=2\text{A}$, $I_{s2}=1\text{A}$ και $V_s=10\text{V}$ να υπολογιστούν οι τάσεις των κόμβων ως προς τον κόμβο αναφοράς.



Σχήμα 3.8

Λύση

(α) Το κύκλωμα έχει τέσσερις κόμβους και ο κόμβος d είναι ο κόμβος αναφοράς. Έστω $\boldsymbol{V}=[V_a,V_b,V_c]^T$ το διάνυσμα των τάσεων των κόμβων. Ο πίνακας των αγωγιμοτήτων $\boldsymbol{G}$ είναι ίσος με

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1+G_3 & 0 \\ -G_2 & 0 & G_2+G_4 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ο πίνακας των ρευμάτων κλάδων $\boldsymbol{I}$ είναι

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{s1} + V_s G_2 \\ I_{s2} \\ -I_{s2} - V_s G_2 \end{bmatrix}$$

Πράγματι, για παράδειγμα, η εξίσωση στον κόμβο a έχει τη μορφή:

$$G_1(V_a - V_b) + (V_a - V_c - V_s)G_2 = I_{s1}$$

$$\Rightarrow (G_1 + G_2)V_a - G_1 V_b - G_2 V_c = I_{s1} + V_s G_2$$

σχέση που αντιστοιχεί στη πρώτη γραμμή των πινάκων $\boldsymbol{G}$ και $\boldsymbol{I}$.

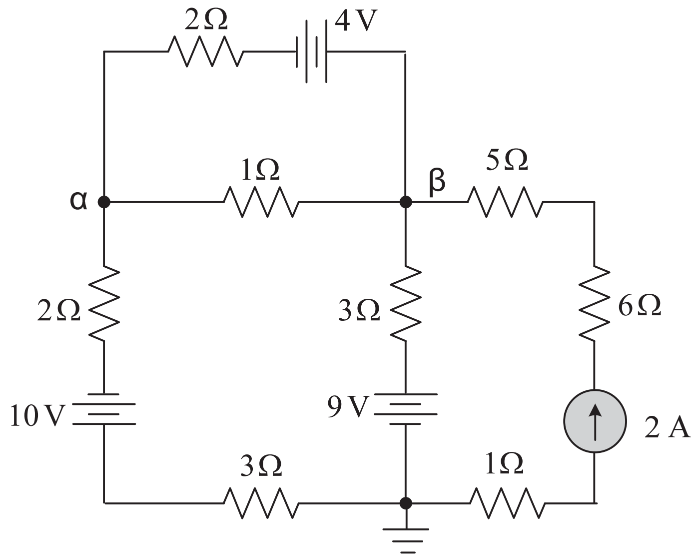
(β) Για τις συγκεκριμένες πηγές προκύπτει, με αντικατάσταση στις παραπάνω σχέσεις, το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & -1 & -0.5 \\ -1 & 1.25 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε τελικά ότι

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.25 \\ 9.0 \\ -1.25 \end{bmatrix} \text{ Volts}$$

Παράδειγμα 3.5 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.9 να προσδιορίσετε τις τάσεις των κόμβων (α) και (β).



Σχήμα 3.9

Λύση

Το κύκλωμα έχει δύο κόμβους και τον κόμβο αναφοράς. Έστω $\boldsymbol{V} = \left[V_\alpha, V_\beta\right]^T$ το διάνυσμα των τάσεων των κόμβων. Παρατηρούμε ότι ο κλάδος που περιέχει την πηγή ρεύματος περιλαμβάνει και αντιστάσεις . Οι αντιστάσεις αυτές δεν επηρεάζουν το ρεύμα του κλάδου και συνεπώς μπορούν να αγνοηθούν. Έτσι, ο πίνακας των αγωγιμοτήτων $\boldsymbol{G}$ είναι ίσος με

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2+3} + 1 + \frac{1}{2} & -1 - \frac{1}{2} \\ -1 - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 102 & -90 \\ -90 & 105 \end{bmatrix}$$

Επίσης, ο πίνακας των ρευμάτων κλάδων $\boldsymbol{I}$ είναι

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{2}-\frac{10}{2+3} \\ 2+\frac{4}{2}+\frac{9}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα

$$\frac{1}{60}\begin{bmatrix} 102 & -90 \\ -90 & 105 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

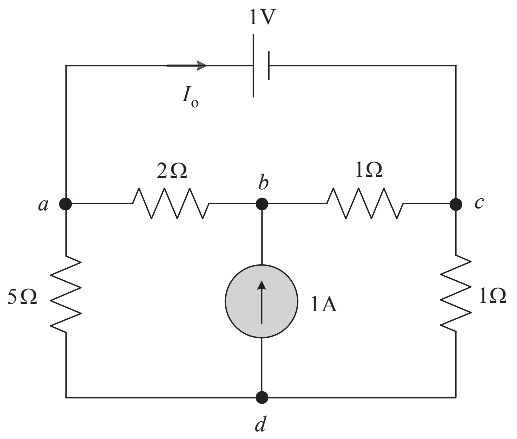
το οποίο έχει την ακόλουθη λύση

$$\begin{bmatrix} V_\alpha \\ V_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.654 \\ 6.808 \end{bmatrix} \mathrm{V}$$

3.3.2 Η μέθοδος των κόμβων σε κυκλώματα με προφανείς εξισώσεις

Σε πολλά κυκλώματα που περιέχουν πηγές τάσης και με κατάλληλη επιλογή του κόμβου αναφοράς μπορούμε από την αρχή, με απλή εποπτεία του κυκλώματος, να προσδιορίσουμε είτε ορισμένες από τις τάσεις των κόμβων είτε να βρούμε ορισμένες προφανείς εξισώσεις μεταξύ αυτών. Με τον τρόπο αυτό οι αναγκαίες εξισώσεις κόμβων που απαιτούνται ελαττώνονται και διευκολύνεται η επίλυση των κυκλωμάτων. Γενικά, μπορούμε να πούμε, ότι αν m κομβικές τάσεις ή m προφανείς εξισώσεις είναι εκ των προτέρων γνωστές, τότε απαιτούνται μόνον $n-1-m$ πρόσθετες εξισώσεις κόμβων και έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε σε ένα σύστημα με μόνο $n-1-m$ ανεξάρτητες γραμμικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 3.6 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.10 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων το ρεύμα I_o.



Σχήμα 3.10

Λύση

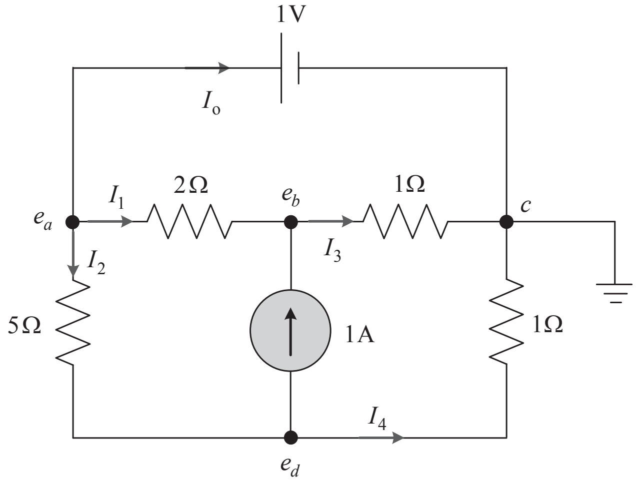
Το κύκλωμα έχει τέσσερις κόμβους. Σύμφωνα με τα κριτήρια επιλογής διαλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον κόμβο c, έτσι, ώστε η τάση του κόμβου a να είναι εκ των προτέρων ίση με την τάση της πηγής του 1 V. Το κύκλωμα για την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων παίρνει τώρα τη μορφή του Σχήματος 3.11, στο οποίο έχουν πλέον σημειωθεί και τα ρεύματα των κλάδων.

Εφόσον η τάση e_a είναι γνωστή και ίση με $1\ \mathrm{V}$ χρειάζεται να πάρουμε μόνο τις δύο εξισώσεις στους κόμβους b και d. Είναι

κόμβος b: $I_3 = I_1 + 1$

κόμβος d: $I_2 = I_4 + 1$

Εκφράζουμε τώρα τα ρεύματα των κλάδων συναρτήσει των κομβικών τάσεων. Έτσι, με την εφαρμογή του ΝΡΚ προκύπτουν οι σχέσεις



Σχήμα 3.11

$$I_1 = \frac{e_a - e_b}{2} = \frac{1 - e_b}{2}$$

$$I_2 = \frac{e_a - e_d}{5} = \frac{1 - e_d}{5}$$

$$I_3 = e_b \qquad \text{και} \quad I_4 = e_d$$

Τις σχέσεις αυτές τις αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κόμβων οπότε προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$e_b = \frac{1 - e_b}{2} + 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{1 - e_d}{5} = e_d + 1$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει τιμές

$$e_b = 1\text{V} \quad \text{και} \quad e_d = -\frac{2}{3}\text{V}$$

Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στις ανωτέρω εξισώσεις των ρευμάτων βρίσκουμε ότι

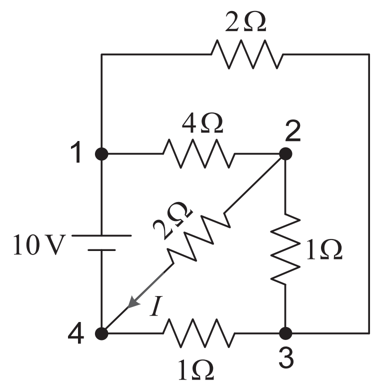
$$I_1 = 0 \qquad I_2 = \frac{1}{3}\text{A}$$

$$I_3 = 1\text{A} \qquad I_4 = -\frac{2}{3}\text{A}$$

Τώρα, από την εξίσωση του κόμβου a προκύπτει ότι το ρεύμα I_o είναι ίσο με

$$I_o = -I_1 - I_2 = -\frac{1}{3}\text{A}$$

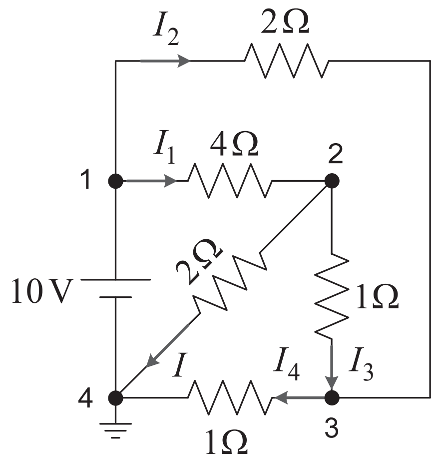
Παράδειγμα 3.7 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.12 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων το ρεύμα I.



Σχήμα 3.12

Λύση

Το κύκλωμα έχει τέσσερις κόμβους. Διαλέγουμε ως κόμβο αναφοράς τον 4 και σημειώνουμε τα ρεύματα των κλάδων όπως στο Σχήμα 3.13.



Σχήμα 3.13

Επειδή η τάση e_1 είναι γνωστή, θα πάρουμε εξισώσεις κόμβων μόνο στους κόμβους 2 και 3. Έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις

$$I_1 = I + I_3$$

και

$$I_4 = I_2 + I_3$$

Εφαρμόζουμε τον ΝΤΚ και προσδιορίζουμε τις σχέσεις για τα ρεύματα των κλάδων

$$I_1 = \frac{10 - e_2}{4} \qquad I_2 = \frac{10 - e_3}{2} \qquad I_3 = e_2 - e_3$$

$$I_4 = e_3 \qquad I = \frac{e_2}{2}$$

Αντικαθιστούμε τα ρεύματα στις εξισώσεις κόμβων, οπότε προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\frac{10 - e_2}{4} = \frac{3}{2} e_2 - e_3 \Rightarrow 7e_2 - 4e_3 = 10$$

$$\frac{10 - e_3}{2} = e_3 - e_2 + e_3 \Rightarrow -2e_2 + 5e_3 = 10$$

Η επίλυση αυτού του συστήματος δίνει

$$e_2 = \frac{10}{3}\ \text{V}$$

και

$$e_3 = \frac{10}{3}\ \text{V}$$

Τέλος, το ρεύμα I θα είναι προφανώς ίσο με

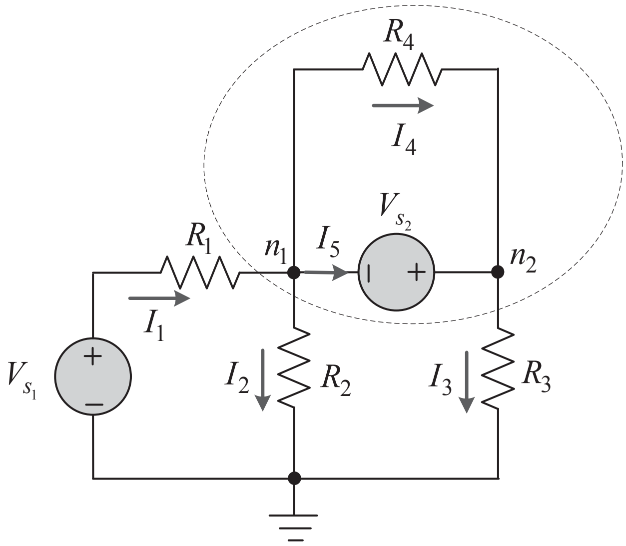
$$I = \frac{e_2}{2} = \frac{5}{3}\ \text{A}$$

3.3.3 Η έννοια του υπερκόμβου

Αν μια πηγή τάσης δεν συνδέεται άμεσα με τον κόμβο αναφοράς αλλά βρίσκεται μεταξύ δύο άλλων κόμβων καλείται ***επιπλέουσα τάση*** (*floating voltage*). Στην περίπτωση αυτή πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στην εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων.

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του Σχήματος 3.14. Το κύκλωμα αυτό έχει δύο κόμβους (εκτός από τον κόμβο αναφοράς) και μεταξύ των δύο αυτών κόμβων συνδέεται η πηγή τάσης V_{s_2}. Αν θελήσουμε να πάρουμε τις εξισώσεις κόμβων στους κόμβους n_1 και n_2 θα διαπιστώσουμε ότι έχουμε δυσκολία να εκφράσομε το ρεύμα I_5 συναρτήσει των κομβικών τάσεων. Ένας τρόπος για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα είναι η θεώρηση του ρεύματος I_5 ως μιας ανεξάρτητης άγνωστης μεταβλητής. Όμως, με τον τρόπο αυτόν καταλήγουμε να έχουμε τρεις άγνωστες μεταβλητές (τις τάσεις V_{n_1}, V_{n_2} και το ρεύμα I_5) αντί για δύο. Φυσικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και στην περίπτωση αυτή την προφανή εξίσωση

$$V_{n_1} + V_{s_2} = V_{n_2} \tag{3.3}$$



Σχήμα 3.14

Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε ως ***υπερκόμβο*** (*super node*) το τμήμα του κυκλώματος που βρίσκεται μέσα στην έλλειψη. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε για τον υπερκόμβο την ακόλουθη εξίσωση ρευμάτων

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{3.4}$$

Στόχος και πάλι είναι η εύρεση των τάσεων των δύο κόμβων. Συνεπώς, εκφράζουμε τα ρεύματα συναρτήσει των τάσεων των κόμβων, οπότε η Εξ. (3.4) γίνεται

$$\frac{V_{s_1} - V_{n_1}}{R_1} = \frac{V_{n_1}}{R_2} + \frac{V_{n_2}}{R_3} \tag{3.5}$$

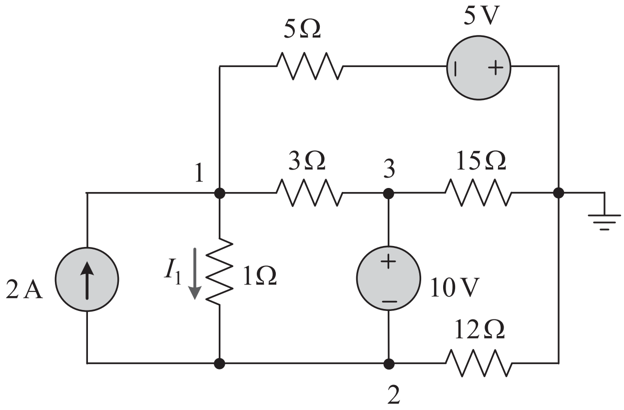
Οι Εξ. (3.3) και (3.5) συνιστούν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τις δύο τάσεις των κόμβων. Λύνοντάς το βρίσκουμε ότι

$$V_{n_1} = \frac{G_1 V_{s_1} - G_2 V_{s_2}}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{3.6}$$

$$V_{n_2} = V_{s_2} + \frac{G_1 V_{s_1} - G_2 V_{s_2}}{G_1 + G_2 + G_3} \tag{3.7}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η επίλυση του προβλήματος έγινε με τη χρήση της εξίσωσης του υπερκόμβου καθώς και μιας “εσωτερική” εξίσωσης στον υπερκόμβο που δεν ήταν τίποτε άλλο από μια προφανή εξίσωση. Η διαδικασία αυτή είναι γενική και αν εφαρμοστεί με προσοχή διευκολύνει την επίλυση των κυκλωμάτων.

Παράδειγμα 3.8 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.15 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων το ρεύμα I_1.



Σχήμα 3.15

Λύση

Το κύκλωμα έχει τέσσερις κόμβους και έχει προκαθοριστεί ο κόμβος αναφοράς. Όπως δείχνεται στο Σχήμα 3.16, για την εφαρμογή της μεθόδου των κόμβων θα θεωρήσουμε ως υπερκόμβο αυτόν που αποτελείται από τους κόμβους 2 και 3.

Έχουμε τις εξισώσεις:

κόμβος 1: $I_1 + I_2 + I_3 = 2$

υπερκόμβος: $I_2 + I_6 + I_5 + I_1 = 2$

όπου

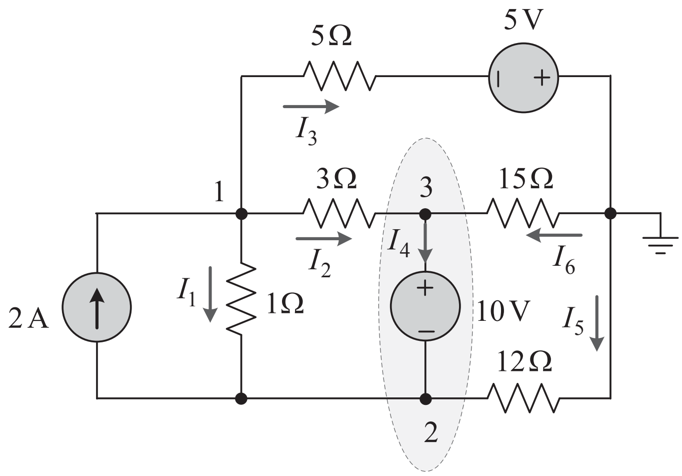
$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{1}, \quad I_2 = \frac{E_1 - E_3}{3}, \quad I_3 = \frac{E_1 + 5}{5}$$

$$I_5 = \frac{-E_2}{12} \quad \text{και} \quad I_6 = \frac{-E_3}{15}$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κόμβων και παίρνουμε

$$\frac{E_1 - E_2}{1} + \frac{E_1 - E_3}{3} + \frac{E_1 + 5}{5} = 2$$

$$\frac{E_1 - E_3}{3} + \frac{-E_3}{15} + \frac{-E_2}{12} + \frac{E_1 - E_2}{1} = 2$$



Σχήμα 3.16

ή

$$23E_1 - 15E_2 - 5E_3 = 15$$

$$80E_1 - 65E_2 - 24E_3 = 120$$

Επίσης, έχουμε την εξίσωση

$$E_3 = E_2 + 10$$

Αντικαθιστούμε το E_3 και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα ως προς τις τάσεις E_1 και E_2:

$$23E_1 - 20E_2 = 65$$

$$80E_1 - 89E_2 = 360$$

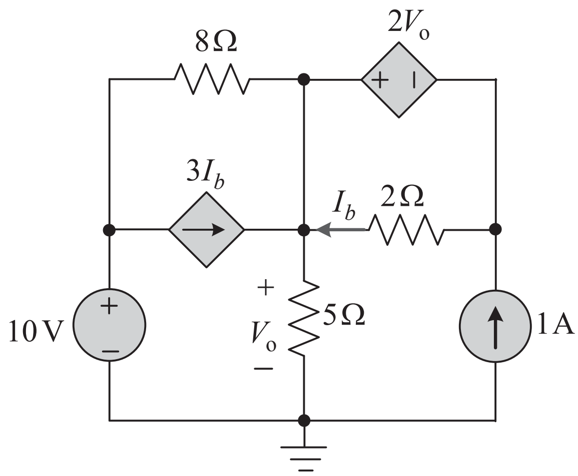
Η επίλυση του συστήματος δίνει

$$E_1 = -3.166\text{V} \quad \text{και} \quad E_2 = -6.89\text{V}$$

Έτσι τελικά

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{1} = 3.725\,\text{A}$$

Παράδειγμα 3.9 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.17 να προσδιοριστούν τα I_b και V_o. Πόση είναι η ισχύς στην πηγή των $3I_b$.



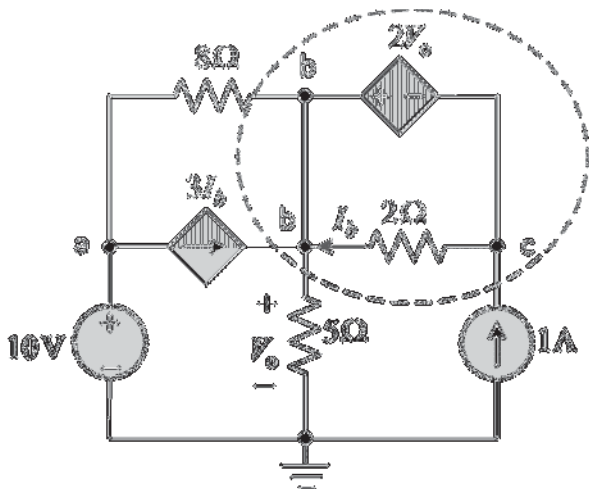
Σχήμα 3.17

Λύση

(α) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των κόμβων. Από το κύκλωμα του Σχήματος 3.18 έχουμε τις προφανείς εξισώσεις

κόμβος a: $V_a = 10\text{V}$

υπερκόμβος: $V_b - V_c = 2V_o = 2V_b \Rightarrow V_b + V_c = 0$



Σχήμα 3.18

Επίσης, από τον υπερκόμβο έχουμε την εξίσωση

$$\frac{V_a - V_b}{8} + 3I_b + 1 = \frac{V_b}{5}$$

Όμως

$$I_b = \frac{V_c - V_b}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} I_b = \frac{-V_b - V_b}{2} = -V_b$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του υπερκόμβου

$$\frac{10 - V_b}{8} - 3V_b + 1 = \frac{V_b}{5} \Rightarrow V_b = V_o = \frac{90}{133} = 0.677\,\mathrm{V}$$

Έτσι

$$I_b = -V_b = -0.677\,\mathrm{A}$$

(β) Η τάση στα άκρα της πηγής των $3I_b$ είναι ίση με

$$V_{ab} = 10 - V_b = 9.323\,\mathrm{V}$$

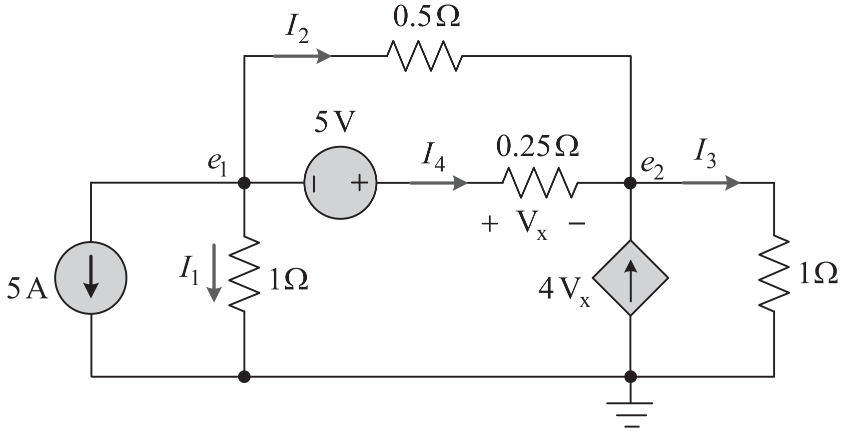
Συνεπώς θα έχουμε ισχύ

$$P = V_{ab} \times (3I_b) = -18.927\,\mathrm{W}$$

3.3.4 Η μέθοδος των κόμβων σε κυκλώματα με εξαρτημένες πηγές

Η μέθοδος των κόμβων εφαρμόζεται με την ίδια μεθοδολογία και σε κυκλώματα με εξαρτημένες πηγές. Η κύρια διαφορά στην περίπτωση των εξαρτημένων πηγών συνίσταται στην αναγκαία χρησιμοποίηση πρόσθετων εξισώσεων που αφορούν τις σχέσεις εξάρτησης. Για κάθε σχέση εξάρτησης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνήθως και μια πρόσθετη εξίσωση. Στα παραδείγματα που ακολουθούν αποσαφηνίζεται η όλη διαδικασία.

Παράδειγμα 3.10 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.19 να προσδιοριστούν οι κομβικές τάσεις e_1 και e_2.



Σχήμα 3.19

Λύση

Εδώ μας δίνεται ο κόμβος αναφοράς ενώ έχουν καθοριστεί και τα ρεύματα των κλάδων. Παρατηρούμε ότι το κύκλωμα έχει 3 κόμβους ενώ περιλαμβάνει και μία εξαρτημένη πηγή ρεύματος.

Στους κόμβους e_1 και e_2 παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$I_1 + I_2 + I_4 = -5$$

$$I_4 + I_2 + 4V_x = I_3$$

Επίσης, ως πρόσθετη εξίσωση λόγω της εξαρτημένης πηγής έχουμε τη σχέση

$$V_x = 0.25 I_4$$

Οι σχέσεις για τα ρεύματα των κλάδων είναι

$$I_1 = e_1$$
$$I_2 = 2e_1 - 2e_2$$
$$I_3 = e_2$$
$$I_4 = 4e_1 - 4e_2 + 20$$

Αντικαθιστούμε την V_x και τα ρεύματα στις εξισώσεις των κόμβων, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$7e_1 - 6e_2 = -25$$

$$-10e_1 + 11e_2 = 40$$

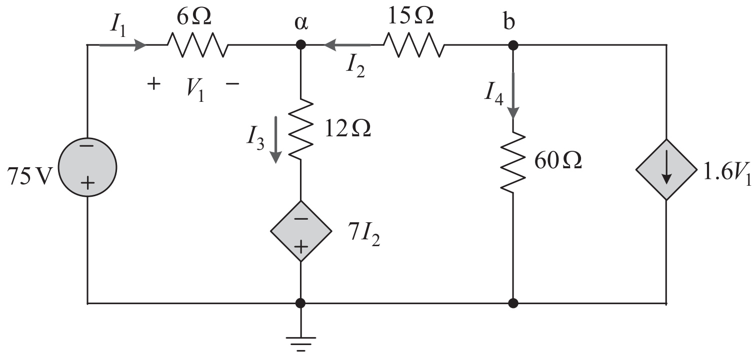
Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε

$$e_1 = -\frac{35}{17}\ \text{V} \quad \text{και} \quad e_2 = \frac{30}{17}\ \text{V}$$

Παράδειγμα 3.11 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.20 να προσδιοριστούν:

(α) Οι τάσεις των κόμβων E_a και E_b.

(β) Η συνολική ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.



Σχήμα 3.20

Λύση

(α) Το κύκλωμα περιλαμβάνει μία ανεξάρτητη πηγή και δύο εξαρτημένες. Οι εξισώσεις στους κόμβους α και b είναι

κόμβος α: $I_1 + I_2 = I_3$

κόμβος b: $I_2 + I_4 + 1.6V_1 = 0$

Τα ρεύματα είναι ίσα με

$$I_1 = \frac{-75 - V_a}{6}$$

$$I_2 = \frac{V_b - V_a}{15}$$

$$I_3 = \frac{V_a + 7I_2}{12} = \frac{V_a + \frac{7}{15}V_b - \frac{7}{15}V_a}{12} = \frac{8V_a + 7V_b}{180}$$

$$I_4 = \frac{V_b}{60}$$

Επίσης, λόγω της εξαρτημένης πηγής τάσης έχουμε τη σχέση

$$V_1 = 6I_1 \Rightarrow V_1 = -75 - V_a$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κόμβων και παίρνουμε

$$\frac{-75-V_a}{6}+\frac{V_b-V_a}{15}=\frac{8V_a+7V_b}{180}$$

$$\frac{V_b-V_a}{15}+\frac{V_b}{60}+1.6(-75-V_a)=0$$

ή ισοδύναμα

$$-10V_a+V_b=450$$

$$-20V_a+V_b=1440$$

Η επίλυση των εξισώσεων αυτών δίνει

$$V_a=-99\text{V} \text{ και } V_b=-540\text{V}$$

(β) Τα ρεύματα στους επιμέρους κλάδους είναι ίσα με

$$I_1=\frac{-75-V_a}{6}=4\,\text{A}, \qquad I_2=\frac{V_b-V_a}{15}=-29.4\,\text{A}$$

$$I_3=\frac{8V_a+7V_b}{180}=-25.4\,\text{A}, \qquad I_4=\frac{V_b}{60}=-9\,\text{A}$$

Συνεπώς, πάνω στις τέσσερις αντιστάσεις θα έχουμε τις ακόλουθες καταναλώσεις ισχύος

$$P_6=I_1^2 6=96\,\text{W}, \quad P_{12}=I_3^2 12=7741.92\,\text{W}$$

$$P_{15}=I_2^2 15=12965.4\,\text{W}, \quad P_{60}=I_4^2 60=4860\,\text{W}$$

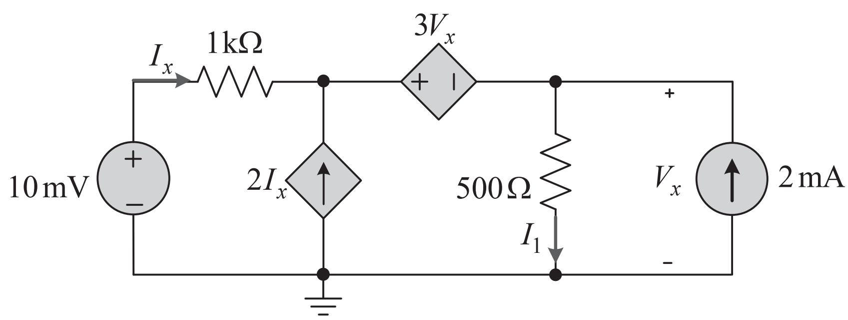
Έτσι, η συνολική ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα είναι ίση με

$$P=P_6+P_{12}+P_{15}+P_{60}=25663.32\,\text{W}$$

Παράδειγμα 3.12 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.21 να προσδιοριστούν:

(α) Το ρεύμα I_1.

(β) Η ισχύς σε κάθε πηγή.

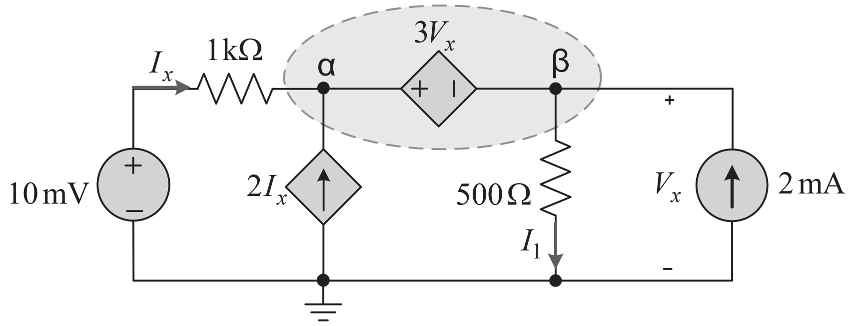


Σχήμα 3.21

Λύση

(α) Το κύκλωμα έχει δύο εξαρτημένες και δύο ανεξάρτητες πηγές. Η εξαρτημένη πηγή τάσης συνδέει δύο κόμβους και συνεπώς σχηματίζεται ένας υπερκόμβος. Από το κύκλωμα του Σχήματος 3.22 λοιπόν έχουμε την ακόλουθη εξίσωση στον υπερκόμβο:

$$I_x+2I_x+2\,\text{mA}=\frac{V_x}{500} \Rightarrow 1500I_x+1=V_x$$



Σχήμα 3.22

Στον υπερκόμβο έχουμε επίσης την προφανή εξίσωση

$$V_a - V_x = 3V_x \Rightarrow V_a = 4V_x$$

Από τον κλάδο της ανεξάρτητης πηγής τάσης προκύπτει ότι

$$1000I_x + V_a = 10\,\text{mV}$$

Από τις τρεις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε

$$V_x = 0.145\,\text{V} \;,\;\; I_x = -0.57\,\text{mA} \;\; \text{και} \;\; V_a = 0.58\,\text{V}$$

Συνεπώς

$$I_1 = \frac{V_x}{500} = 0.29\,\text{mA}$$

(β) Σε κάθε πηγή έχουμε

$$P_{10mV} = 10\times 10^{-3}(-I_x) = 5.7\,\mu\text{W}$$

$$P_{2I_x} = V_a(-2I_x) = 0.6612\,\text{mW}$$

$$P_{3V_x} = 3V_x(I_x + 2I_x) = -0.7438\,\text{mW}$$

$$P_{2mA} = V_x(-2\,\text{mA}) = -0.29\,\text{mW}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ανεξάρτητη πηγή τάσης καθώς και η εξαρτημένη πηγή ρεύματος απορροφούν ισχύ ενώ αντίθετα οι άλλες δύο πηγές αποδίδουν ισχύ στο κύκλωμα. Το ισοζύγιο ισχύος ισχύει αφού

$$P_{10mV} + P_{2I_x} + P_{3V_x} + P_{2mA} = -0.3669\,\text{mW}\,,\ \text{και}$$

$$P_{1k} + P_{500} = 1000I_x^2 + 500I_1^2 = 0.3669\,\text{mW}$$

3.4 Ρεύματα βρόχων

Στην ενότητα αυτή θα καθορίσουμε τι ονομάζουμε ρεύματα βρόχων και θα δείξουμε ότι κάθε ρεύμα κλάδου μπορεί μοναδικά να εκφραστεί σε σχέση με τα ρεύματα των βρόχων. Επειδή, ένα συνεκτικό κύκλωμα που αποτελείται από n κόμβους και b κλάδους έχει $b-n+1$ ανεξάρτητους βρόχους, το κύκλωμα αυτό θα έχει $b-n+1$ ρεύματα βρόχων. Ως ρεύμα βρόχου καθορίζουμε το ρεύμα που "κυκλοφορεί" στο βρόχο. Προφανώς, το ρεύμα αυτό σε ορισμένους κλάδους, ισούται με το ρεύμα του κλάδου, όμως γενικά, το ρεύμα που διαρρέει έναν κλάδο ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα δύο βροχικών ρευμάτων. Για παράδειγμα, ας μελετήσουμε το κύκλωμα του Σχήματος 3.23(α). Το κύκλωμα αυτό έχει 4 κόμβους και 6 κλάδους. Άρα θα έχει $6-4+1=3$ ανεξάρτητους βρόχους που όπως θα δούμε δίνουν 3 ανεξάρτητες εξισώσεις ως προς τα ρεύματα των βρόχων. Στο Σχήμα 3.23(β), έχουμε σχεδιάσει τρεις ανεξάρτητους βρόχους καθώς επίσης, έχουμε καθορίσει και τα ρεύματα των κλάδων. Τα ρεύματα των βρόχων συμβολίζονται με J_1, J_2 και J_3.

Παρατηρούμε ότι κάθε ρεύμα κλάδου μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με τα τρία ρεύματα των βρόχων ως εξής:

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 - J_2 \\ I_2 &= J_2 \\ I_3 &= J_1 - J_3 \\ I_4 &= J_3 - J_2 \\ I_5 &= J_3 \\ I_6 &= J_1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Με τη μορφή πινάκων, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως

$$M^T J = I \tag{3.9}$$

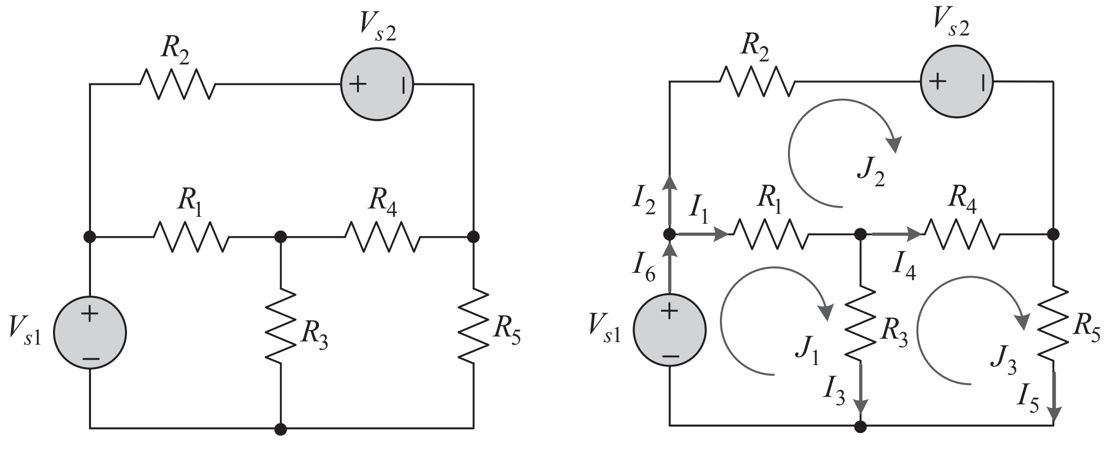
όπου

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

και

J το διάνυσμα των ρευμάτων βρόχων

I το διάνυσμα των κλαδικών ρευμάτων



Σχήμα 3.23 (α) Αρχικό κύκλωμα. (β) Καθορισμός των ρευμάτων βρόχων.

Εξάλλου, αν εφαρμόσουμε τον ΝΤΚ για κάθε βρόχο θα πάρουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{array}{r} \text{Βρόχος 1:} \\ \text{Βρόχος 2:} \\ \text{Βρόχος 3:} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.11}$$

όπου $V_i, i = 1,...,6$ οι τάσεις των κλάδων. Δηλαδή

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 R_1 \\ V_2 &= I_2 R_2 + V_{s2} \\ V_3 &= I_3 R_3 \\ V_4 &= I_4 R_4 \\ V_5 &= I_5 R_5 \\ V_6 &= -V_{s1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Η σχέση (3.11) μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως

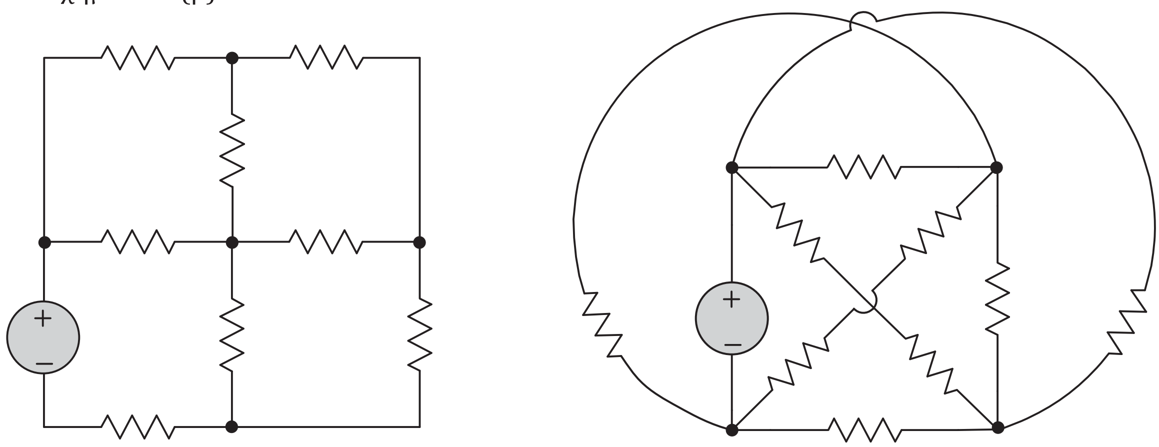
$$MV = 0 \tag{3.13}$$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις γραμμές του πίνακα M είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι οι στήλες του πίνακα M αντιστοιχούν στους κλάδους του κυκλώματος. Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι τα τρία ρεύματα βρόχων αποτελούν ανεξάρτητες μεταβλητές.

Οι Εξ. (3.9) και (3.13) είναι γενικές και θα χρησιμοποιηθούν σε άλλο κεφάλαιο για την ανάπτυξη της γενικής μεθόδου των βρόχων.

3.5 Η μέθοδος των βρόχων

Η μέθοδος των κόμβων είναι μία γενική μέθοδος ανάλυσης κυκλωμάτων χωρίς όμως να είναι μοναδική. Η δεύτερη μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η ***μέθοδος των βρόχων*** η οποία βασίζεται στο ΝΤΚ. Στην πράξη πολλές φορές μπορεί να γίνει συνδυασμός των μεθόδων κόμβων και βρόχων. Η μέθοδος των βρόχων που όπως είπαμε βασίζεται στο ΝΤΚ, είναι εφαρμόσιμη στη πλειονότητα των κυκλωμάτων που θα συναντήσουμε. Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος των βρόχων είναι πλήρως εφαρμόσιμη σε επίπεδα κυκλώματα. Με τον όρο επίπεδα κυκλώματα, εννοούμε τα κυκλώματα για τα οποία αν κάνουμε το διάγραμμά τους πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια, τότε κανένας κλάδος δεν περνάει πάνω ή κάτω, από κάποιον άλλο κλάδο. Για παράδειγμα, ενώ το κύκλωμα του Σχήματος 3.24(α) είναι επίπεδο το κύκλωμα που δείχνεται στο Σχήμα 3.24(β) δεν είναι.



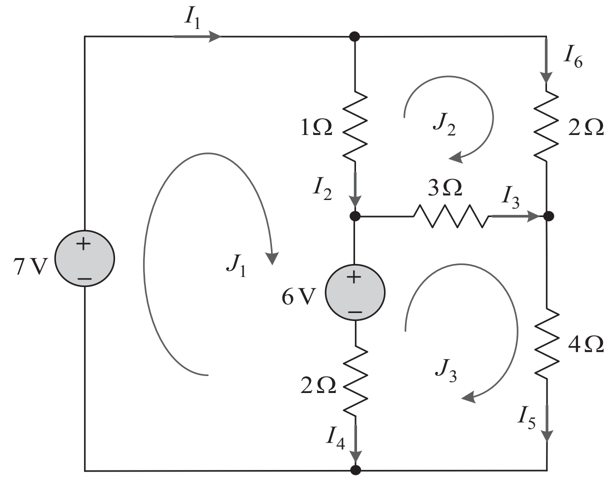
(α) (β)

Σχήμα 3.24 (α) Επίπεδο κύκλωμα. (β) Μη επίπεδο κύκλωμα.

Η μέθοδος των βρόχων ξεκινά με τον καθορισμό των ανεξάρτητων βρόχων. Όπως θα αναπτυχθεί σε επόμενο Κεφάλαιο, η επιλογή των βρόχων μπορεί να γίνει συστηματικά. Σε απλά κυκλώματα αυτό γίνεται εύκολα λαμβάνοντας πάντα υπόψη ότι υπάρχουν μόνο $b-n+1$ ανεξάρτητοι βρόχοι σε κάθε κύκλωμα. Μετά τον καθορισμό των βρόχων σημειώνονται τα ρεύματα των βρόχων και οι φορές τους. Συνήθως τα ρεύματα των βρόχων καθορίζουμε να έχουν την ίδια φορά, που κατά κανόνα ταυτίζεται με τη φορά κίνησης των δεικτών του ωρολογίου.

Η εξίσωση κάθε βρόχου προκύπτει από την εφαρμογή του ΝΤΚ στην περιφέρεια του βρόχου. Με απλά λόγια, αυτό σημαίνει ότι "σε ένα βρόχο το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων ισούται με μηδέν". Παίρνοντας τις εξισώσεις των βρόχων καταλήγουμε πάντα σε ένα σύστημα $b-n+1$ εξισώσεων με άγνωστες μεταβλητές τα ρεύματα των βρόχων. Λύνοντας το σύστημα αυτό προσδιορίζουμε τα ρεύματα βρόχων με τα οποία κατόπιν εύκολα επιλύουμε το κύκλωμα. Για την κατανόηση της μεθόδου θα δώσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.13 Το κύκλωμα του Σχήματος 3.25 να επιλυθεί με τη μέθοδο των βρόχων.



Σχήμα 3.25

Λύση

Το κύκλωμα έχει 4 κόμβους και 6 κλάδους, άρα θα έχει $6-4+1$ ανεξάρτητους βρόχους. Οι βρόχοι που επελέγησαν δείχνονται στο Σχήμα 3.25 ενώ με J_1, J_2 και J_3 έχουμε συμβολίσει τα ρεύματά τους. Οι τρεις εξισώσεις βρόχων του κυκλώματος είναι:

βρόχος 1: $3J_1 - J_2 - 2J_3 = 7 - 6 = 1$

βρόχος 2: $-J_1 + 6J_2 - 3J_3 = 0$

βρόχος 3: $-2J_1 - 3J_2 + 9J_3 = 6$

ή υπό μορφή πινάκων

$$RJ = V_s$$

όπου

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{V_s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναπτυχθεί μια συστηματική τεχνική για την εύρεση των πινάκων $\boldsymbol{R}$ και $\boldsymbol{V_s}$. Αυτό το οποίο τώρα μπορούμε να παρατηρήσουμε για τον πίνακα $\boldsymbol{R}$ είναι ότι

(α) Είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιό του.

(β) Όλα τα στοιχεία του είναι αρνητικά εκτός από τα στοιχεία της διαγωνίου του.

(γ) Οι τιμές των στοιχείων της διαγωνίου του ισούνται με το άθροισμα των αντιστάσεων σε κάθε βρόχο.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι γενικές για ωμικά κυκλώματα, μπορούν όμως να επεκταθούν και σε κυκλώματα με πυκνωτές και πηνία με την εισαγωγή της έννοιας της ***μιγαδικής σύνθετης αντίστασης*** στο πεδίο της συχνότητας. Τα σχετικά θέματα θα αναλυθούν λεπτομερώς στη θεωρία των Κυκλωμάτων ΙΙ.

Από τη λύση του γραμμικού συστήματος προκύπτει ότι

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 135 \\ 81 \\ 117 \end{bmatrix} \mathrm{A}$$

Τώρα, τα ρεύματα των κλάδων προκύπτουν εύκολα με τη βοήθεια σχέσεων όπως οι εξισώσεις (3.9). Είναι