

## Χωρικές Περιγραφές και Ομογενείς Μετασχηματισμοί

### 2.1. Εισαγωγή

Η λειτουργία των ρομποτικών χειριστών είναι συνυφασμένη με τη μετακίνηση υλικών και εργαλείων μέσα στο χώρο με τη βοήθεια κάποιου μηχανισμού κίνησης. Κατά συνέπεια προκύπτει η ανάγκη εύρεσης τρόπων αναπαράστασης της θέσης και του προσανατολισμού των εξαρτημάτων και των εργαλείων, αλλά και του ίδιου του μηχανισμού της κίνησης. Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι προκαταρκτικές έννοιες και τα γεωμετρικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή και τους μετασχηματισμούς της θέσης και της κατεύθυνσης ενός σώματος στο χώρο και αναπτύσσονται με λεπτομέρεια οι νόμοι σύνθεσης των μετασχηματισμών.

### 2.2. Περιγραφές στο χώρο

Με τον όρο *περιγραφή* αναφερόμαστε εδώ στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των διαφόρων αντικειμένων, οι οποίες έχουν σχέση με την τοποθέτησή τους στο χώρο από ένα σύστημα χειρισμού αντικειμένων. Τα αντικείμενα δηλαδή αυτά μπορεί να είναι ανταλλακτικά, εργαλεία ή ακόμη και ο ίδιος ο ρομποτικός χειριστής. Αμέσως παρακάτω αναφερόμαστε στις περιγραφές της θέσης και του προσανατολισμού των αντικειμένων, εκφρασμένων ως προς κάποιο βασικό σύστημα αναφοράς.

#### 2.2.1. Περιγραφή της θέσης

Η θέση οποιουδήποτε σημείου στο χώρο μπορεί να παρασταθεί, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, με ένα  $3 \times 1$  **διάνυσμα θέσης**, το οποίο περιέχει τις συντεταγμένες του σημείου ως προς το δοθέν σύστημα συντεταγμένων. Επειδή συχνά θα χρειασθεί να ορίσουμε περισσότερα του ενός συστήματα συντεταγμένων, είναι σύνηθες να προστίθεται στο σύμβολο του σημείου και κάποιος δείκτης ή «ετικέτα», που υποδηλώνει το σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, για παράδειγμα, στη βιβλιογραφία μπορούν να απαντηθούν οι συμβολισμοί  $\mathbf{p}_A$  και  ${}^A\mathbf{p}$  εννοώντας την περιγραφή θέσης του σημείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων A. Εμείς θα ακολουθούμε τον πρώτο συμβολισμό. Έτσι

$$\mathbf{p}_A = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

όπου  $p_x, p_y, p_z$  οι συντεταγμένες του σημείου στους άξονες  $x, y, z$  του συστήματος συντεταγμένων. Υπάρχουν και άλλες τριάδες περιγραφής της θέσης ενός σημείου στο χώρο,

όπως για παράδειγμα οι σφαιρικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες του, οι οποίες αναφέρθηκαν ήδη στο Κεφάλαιο 1, στη σφαιρική και κυλινδρική ρομποτική διάταξη.

### 2.2.2. Περιγραφή του προσανατολισμού

Πολλές φορές δεν αρκεί να περιγραφεί η θέση ενός σημείου στο χώρο, αλλά είναι επιθυμητό να περιγραφεί και ο **προσανατολισμός** ενός σώματος στο χώρο. Για παράδειγμα, αν ένα διάνυσμα θέσης περιγράφει τη θέση ενός σημείου που βρίσκεται ανάμεσα στα ακροδάκτυλα του χεριού (αρπάγης) ενός χειριστή, τότε η ακριβής θέση του χεριού δεν είναι πλήρως περιγεγραμμένη, αν δεν δοθεί και ο προσανατολισμός του. Για παράδειγμα, αν υποθεθεί ότι ο χειριστής έχει ικανό αριθμό αρθρώσεων, τότε το χέρι θα μπορούσε να λάβει οποιοδήποτε προσανατολισμό με το σημείο των ακροδακτύλων του να παραμένει στην ίδια πάντα θέση. Για να περιγραφεί ο προσανατολισμός ενός αντικειμένου, είναι απαραίτητο να προσκολληθεί ένα σύστημα συντεταγμένων πάνω σ' αυτό και στη συνέχεια να δοθεί η περιγραφή του νέου αυτού συστήματος συντεταγμένων σε σχέση με το σύστημα αναφοράς. Έτσι, οι θέσεις των σημείων περιγράφονται με διανύσματα και οι προσανατολισμοί των σωμάτων με ένα προσκολλημένο σ' αυτά σύστημα συντεταγμένων.

Ένας τρόπος για να περιγραφεί το προσκολλημένο στο σώμα σύστημα συντεταγμένων, έστω B, είναι να εκφραστούν τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων σε σχέση με ένα σύστημα αναφοράς A. Έστω ότι τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος συντεταγμένων B συμβολίζονται  $i_B, j_B$  και  $k_B$ . Τότε, αν γραφούν σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων A, συμβολίζονται  $i_A^B, j_A^B$  και  $k_A^B$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα τελευταία διανύσματα, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν τις τρεις στήλες ενός (3x3) πίνακα. Ο πίνακας που σχηματίζεται καλείται **πίνακας περιστροφής** και επειδή αυτός ο πίνακας περιστροφής εκφράζει το B σε σχέση με το A, συμβολίζεται  $\mathbf{R}_A^B$ . Έτσι, ενώ η θέση ενός σημείου περιγράφεται με ένα διάνυσμα, ο προσανατολισμός ενός σώματος περιγράφεται με ένα πίνακα. Σε επόμενα τμήματα του κεφαλαίου θα δούμε και άλλους τρόπους περιγραφής του προσανατολισμού που απαιτούν μόνο τρεις παραμέτρους αντί για εννέα που απαιτεί η περιγραφή με πίνακα. Ο πίνακας περιγραφής του προσανατολισμού μπορεί να γραφεί στην αναλυτική του μορφή:

$$\mathbf{R}_A^B = \begin{bmatrix} i_A^B & j_A^B & k_A^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

Μπορούμε να δώσουμε εκφράσεις για τις ποσότητες  $r_{ij}$  της (2.2.2), αν σκεφτούμε ότι οι συνιστώσες κάθε διανύματος στήλης της (2.2.2) είναι στην πραγματικότητα οι προβολές του κάθε μοναδιαίου διανύσματος του B στα μοναδιαία διανύσματα του A. Επομένως, κάθε στοιχείο του  $\mathbf{R}_A^B$  μπορεί να γραφεί ως το **εσωτερικό γινόμενο** (dot product) ενός ζεύγους μοναδιαίων διανυσμάτων ως εξής:

$$\mathbf{R}_A^B = \begin{bmatrix} i_A^B & j_A^B & k_A^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_B \cdot i_A & j_B \cdot i_A & k_B \cdot i_A \\ i_B \cdot j_A & j_B \cdot j_A & k_B \cdot j_A \\ i_B \cdot k_A & j_B \cdot k_A & k_B \cdot k_A \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

Επειδή το εσωτερικό γινόμενο δύο μοναδιαίων διανυσμάτων δίνει στην πραγματικότητα το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας, τα στοιχεία των πινάκων περιστροφής καλούνται συχνά και **συνημίτονα κατεύθυνσης**. Μια πιο προσεκτική ματιά στην (2.2.3) θα μας δείξει ότι οι γραμμές του πίνακα είναι στην πραγματικότητα τα μοναδιαία διανύσματα του A εκφρασμένα ως προς το B, δηλαδή,

$$\mathbf{R}_A^B = \begin{bmatrix} i_A^B & j_A^B & k_A^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i_B^A)^T \\ (j_B^A)^T \\ (k_B^A)^T \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

Επομένως, ο  $\mathbf{R}_B^A$ , δηλαδή η περιγραφή του πλαισίου συντεταγμένων A σε σχέση με το πλαίσιο B, δίνεται από την αναστροφή της (2.2.3), δηλαδή,

$$\mathbf{R}_B^A = (\mathbf{R}_A^B)^T \quad (2.2.5)$$

Με βάση τα παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο αντίστροφος ενός πίνακα περιστροφής είναι ίσος με τον ανάστροφό του. Πράγματι, είναι πολύ εύκολο να δειχθεί ότι

$$(\mathbf{R}_A^B)^T \mathbf{R}_A^B = \begin{bmatrix} (i_B^A)^T \\ (j_B^A)^T \\ (k_B^A)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A^B & j_A^B & k_A^B \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 \quad (2.2.6)$$

Όπου  $\mathbf{I}_3$  είναι ο (3x3) μοναδιαίος πίνακας. Επομένως,

$$\mathbf{R}_B^A = (\mathbf{R}_A^B)^{-1} = (\mathbf{R}_A^B)^T \quad (2.2.7)$$

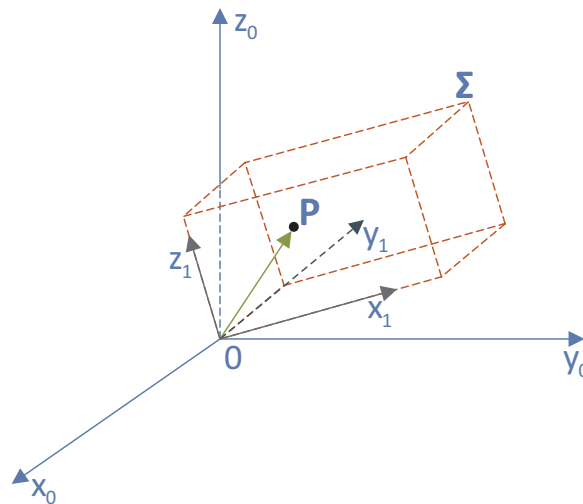
Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι ένας πίνακας περιστροφής, όπως ορίζεται από την (2.2.3), έχει ορθοκανονικές στήλες και γραμμές. Δηλαδή οι στήλες και οι γραμμές του έχουν μοναδιαίο μέτρο και είναι ορθογώνιες, δηλαδή έχουν ανά δύο μηδενικό εσωτερικό γινόμενο. Οι πίνακες με αυτή την ιδιότητα καλούνται **ορθογώνιοι** πίνακες. Γνωρίζουμε όμως από τη γραμμική άλγεβρα ότι ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ίσος με τον ανάστροφό του. Το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα προέκυψε και από την παραπάνω γεωμετρική προσέγγιση.

Η περιγραφή ενός σώματος στη ρομποτική απαιτεί την περιγραφή της θέσης ενός χαρακτηριστικού σημείου του και την περιγραφή του προσανατολισμού του σώματος ως προς το σύστημα συντεταγμένων αναφοράς. Το σύστημα συντεταγμένων που είναι προσκολλημένο στο σώμα και χρησιμεύει στην περιγραφή του προσανατολισμού του σώματος θεωρείται συνήθως ότι έχει σαν αρχή του το χαρακτηριστικό σημείο του σώματος. Επειδή το ζεύγος θέσης

και προσανατολισμού απαντάται πολύ συχνά στη ρομποτική, στη βιβλιογραφία απαντάται και μια σύνθετη περιγραφική οντότητα που καλείται **πλαίσιο** (frame) και περιλαμβάνει και τις δύο αυτές περιγραφές. Δηλαδή, το πλαίσιο είναι ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων που δίνουν πληροφορία για τη θέση και τον προσανατολισμό ενός σώματος. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες για την σύνθετη αυτή περιγραφή στο [1]. Εμείς θα αποφύγουμε τη χρήση της για να μην υπάρχει σύγχυση με την ορολογία του πλαισίου συντεταγμένων που στο παρόν κείμενο είναι συνώνυμη με το σύστημα συντεταγμένων.

### 2.3. Περιστροφές

Στο Σχήμα 2-1 φαίνεται ένα συμπαγές σώμα  $\Sigma$  στο οποίο έχει προσκολληθεί ένα σύστημα συντεταγμένων  $ox_1y_1z_1$ . Έστω ακόμη ότι το σύστημα συντεταγμένων έχει προέλθει από την περιστροφή ενός συστήματος αναφοράς  $ox_0y_0z_0$ , που έχει την ίδια αρχή  $o$ .



**Σχήμα 2-1** Συμπαγές σώμα με προσκολλημένο σ' αυτό πλαίσιο συντεταγμένων που έχει προέλθει από περιστροφή βασικού πλαισίου συντεταγμένων.

Επιθυμούμε να συσχετίσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου  $\mathbf{p}$  του  $\Sigma$  πάνω στο πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_1y_1z_1$  με τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου πάνω στο πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$ . Έστω  $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$  τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του  $ox_0y_0z_0$  και ομοίως έστω  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$  τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του  $ox_1y_1z_1$ . Τότε, το διάνυσμα που άγεται από το σημείο της κοινής αρχής  $o$  μέχρι το σημείο  $\mathbf{p}$  του αντικειμένου μπορεί να παρασταθεί σε σχέση με τα  $ox_0y_0z_0$  και  $ox_1y_1z_1$  ως ακολούθως:

$$\mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{i}_0 + p_{0y}\mathbf{j}_0 + p_{0z}\mathbf{k}_0 \quad (2.3.1)$$

και

$$\mathbf{p}_1 = p_{1x}\mathbf{i}_1 + p_{1y}\mathbf{j}_1 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \quad (2.3.2)$$

Επειδή τα  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_1$  είναι παραστάσεις του ίδιου διανύσματος  $\mathbf{p}$ , η σχέση μεταξύ των συνιστωσών του  $\mathbf{p}$  στα δύο πλαίσια συντεταγμένων μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$p_{0x} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = p_{1x} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \quad (2.3.3)$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$p_{0y} = p_{1x} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \quad (2.3.4)$$

$$p_{0z} = p_{1x} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1y} \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1z} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \quad (2.3.5)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις τρεις αυτές εξισώσεις στην ακόλουθη μητρική μορφή

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.3.6)$$

όπου

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

Ο 3x3 πίνακας  $\mathbf{R}_0^1$  είναι ο γνωστός από το προηγούμενο τμήμα **πίνακας περιστροφής**. Στην προκειμένη περίπτωση παριστάνει τον πίνακα μετασχηματισμού των συντεταγμένων του  $\mathbf{p}$  ως προς το  $ox_1y_1z_1$  στις συντεταγμένες του ως προς το  $ox_0y_0z_0$ . Έτσι, αν κάποιο σημείο εκφράζεται σε σχέση με το  $ox_1y_1z_1$  σαν  $\mathbf{p}_1$ , τότε το  $\mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1$  παριστάνει το ίδιο διάνυσμα εκφρασμένο όμως συναρτήσει των συνιστωσών του στο πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$ .

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}_0 \quad (2.3.8)$$

όπου

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$

Και όπου ο πίνακας  $\mathbf{R}_1^0$  παριστάνει τον αντίστροφο του μετασχηματισμού  $\mathbf{R}_0^1$ . Δεδομένου ότι το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα καταλήγουμε στη σχέση

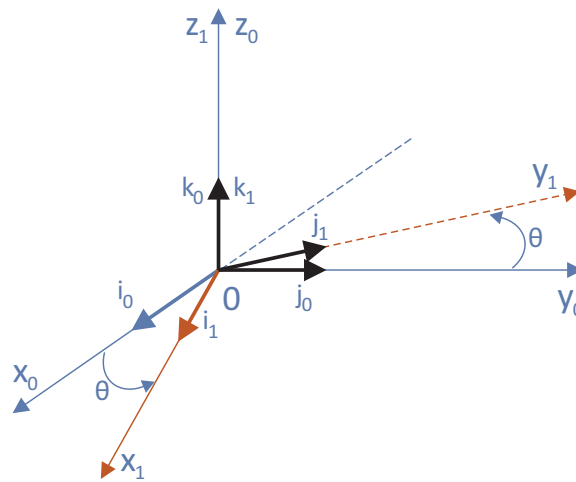
$$\mathbf{R}_1^0 = (\mathbf{R}_0^1)^{-1} = (\mathbf{R}_0^1)^T \quad (2.3.10)$$

που είδαμε και στο προηγούμενο τμήμα του κεφαλαίου. Όπως γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα, οι πίνακες, των οποίων ο αντίστροφος ισούται με τον ανάστροφο, ονομάζονται **ορθογώνιοι**. Τα διανύσματα στήλης του πίνακα  $\mathbf{R}_0^1$  είναι μοναδιαίου μήκους και ορθογώνια μεταξύ τους. Μπορεί να δειχθεί ότι  $\det \mathbf{R}_0^1 = \pm 1$ . Αν μάλιστα περιορισθούμε σε συστήματα συντεταγμένων, που υπακούουν στον κανόνα του δεξιού χεριού, τότε  $\det \mathbf{R}_0^1 = +1$ . Οι ορθογώνιοι πίνακες με ορίζουσα +1 καλούνται συνήθως **πίνακες περιστροφής**. Ένας συνήθης

συμβολισμός για όλους τους  $3 \times 3$  πίνακες περιστροφής είναι ο  $SO(3)$  [2] (Ο συμβολισμός είναι συντομογραφία του Special Orthogonal Group of order 3).

### 2.3.1. Βασικοί πίνακες περιστροφής

Έστω ότι το πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$  έχει προέλθει από περιστροφή του πλαισίου  $ox_0y_0z_0$  γύρω από τον άξονα  $z_0$  κατά μία γωνία  $\theta$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-2. Σημειώνουμε εδώ ότι η θετική φορά περιστροφής της γωνίας  $\theta$  δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, δηλαδή μια περιστροφή  $\theta$  μοιρών γύρω από τον άξονα  $z$  κάνει ένα δεξιόστροφο κοχλία πάνω στον άξονα  $z$  να προχωρήσει περιστρεφόμενος κατά τη θετική φορά του άξονα  $z$ .



Σχήμα 2-2 Περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$ .

Από το Σχήμα 2-2 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 &= \cos \theta, & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 &= -\sin \theta \\ \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 &= \cos \theta, & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 &= \sin \theta \\ \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1 &= 1 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

ενώ όλα τα άλλα εσωτερικά γινόμενα είναι μηδενικά. Επομένως, ο πίνακας μετασχηματισμού  $\mathbf{R}_0^1$  παίρνει την εξής απλή μορφή.

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

Ο πίνακας της (2.3.12) καλείται **βασικός πίνακας περιστροφής** (περί τον άξονα  $z$ ). Επειδή στην προκειμένη περίπτωση η περιστροφή γίνεται γύρω από τον αρχικό άξονα  $z$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πιο περιγραφικό συμβολισμό  $\mathbf{R}_{z,\theta}$  αντί του  $\mathbf{R}_0^1$ . Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι ο βασικός πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}_{z,\theta}$  έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

$$\mathbf{R}_{z,0} = \mathbf{I} \quad (2.3.13)$$

$$\mathbf{R}_{z,\theta} \mathbf{R}_{z,\varphi} = \mathbf{R}_{z,\theta+\varphi} \quad (2.3.14)$$

οι οποίες συνεπάγονται την

$$\mathbf{R}_{z,\theta}^{-1} = \mathbf{R}_{z,-\theta} \quad (2.3.15)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε τους πίνακες που παριστάνουν τις περιστροφές γύρω από τους άξονες x και y που είναι οι

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.16)$$

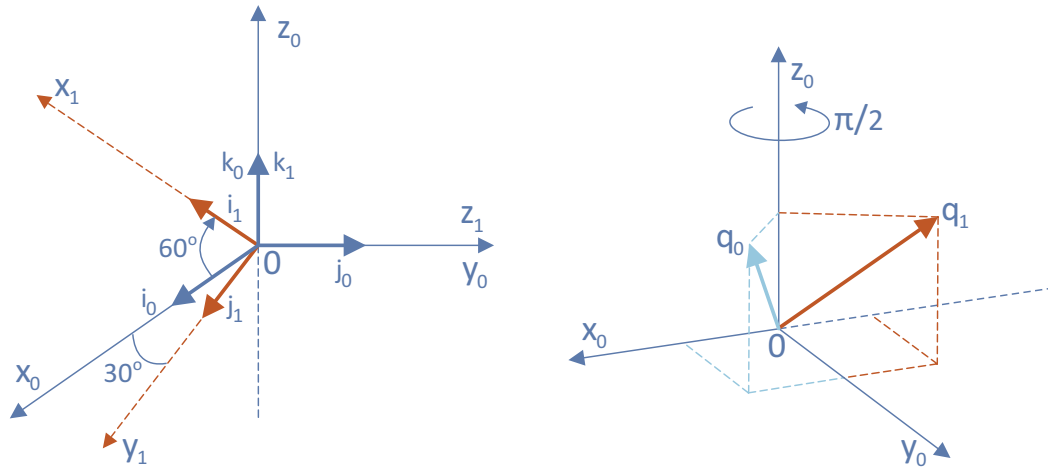
$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.17)$$

και οι οποίοι ικανοποιούν ανάλογες ιδιότητες με αυτές των (2.3.13) – (2.3.15).

Όπως είδαμε και στην περιγραφή του προσανατολισμού ενός σώματος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας περιστροφής καθορίζει και τον **προσανατολισμό** του πλαισίου συντεταγμένων  $ox_1y_1z_1$  σε σχέση με το πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$ . Μάλιστα, οι στήλες του  $\mathbf{R}_0^1$  είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης των αξόνων του  $ox_1y_1z_1$  σε σχέση με τους άξονες του  $ox_0y_0z_0$ . Για παράδειγμα, η πρώτη στήλη  $[\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0]^T$  του  $\mathbf{R}_0^1$  καθορίζει την κατεύθυνση του άξονα  $x_1$  σε σχέση με το πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$ . Επίσης, ο πίνακας περιστροφής μπορεί να θεωρηθεί και ως ένας τελεστής που επιδρά σε ένα διάνυσμα στο σύστημα συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$  και το μετασχηματίζει περιστρέφοντάς το σε ένα άλλο διάνυσμα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί αναδεικνύονται οι δύο αυτές όψεις ενός πίνακα περιστροφής.

**Παράδειγμα 2.3.1.** Να αναδειχτεί ο πίνακας περιστροφής ως περιγραφή του σχετικού προσανατολισμού ενός πλαισίου ως προς κάποιο άλλο και ως τελεστής επί διανύσματος σε αμετάβλητο πλαίσιο συντεταγμένων.

Έστω τα πλαίσια συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$  και  $ox_1y_1z_1$  του αριστερού σχήματος. Προβάλλοντας τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$  στα  $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$  παίρνουμε τις συντεταγμένες των  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$  στο πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$ . Βλέπουμε ότι οι συντεταγμένες που προκύπτουν από τα συνημίτονα των αντίστοιχων γωνιών είναι: του  $\mathbf{i}_1$  οι  $(\cos 60^\circ, \cos 90^\circ, \cos 30^\circ) = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ , του  $\mathbf{j}_1$  οι  $(\cos 30^\circ, \cos 90^\circ, \cos 120^\circ) = (\sqrt{3}/2, 0, -1/2)$  και του  $\mathbf{k}_1$  οι  $(\cos 90^\circ, \cos 0^\circ, \cos 90^\circ) = (0, 1, 0)$ .



Ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}_0^1$  που προσδιορίζει τον σχετικό προσανατολισμό του  $ox_1y_1z_1$  ως προς το  $ox_0y_0z_0$  έχει αυτά τα διανύσματα συντεταγμένων ως στήλες του<sup>1</sup>.

$$\mathbf{R}_0^1 = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω τώρα το διάνυσμα  $\mathbf{q}_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$ , το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $z_0$  κατά  $\pi/2$ , όπως φαίνεται στο δεξί σχήμα. Το διάνυσμα  $\mathbf{q}_1$  μπορεί να προκύψει από την

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{R}_{z, \pi/2} \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας, ένας πίνακας περιστροφής μπορεί να θεωρηθεί ότι:

1. Παριστάνει ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, που συσχετίζει τις συντεταγμένες ενός σημείου  $\mathbf{p}$  σε δύο διαφορετικά πλαίσια συντεταγμένων.
2. Δίνει τον προσανατολισμό ενός μετασχηματισμένου πλαισίου συντεταγμένων σε σχέση με ένα σταθερό πλαίσιο συντεταγμένων
3. Είναι ένας τελεστής που παίρνει ένα διάνυσμα  $\mathbf{p}$  και το μετατρέπει (περιστρέφοντάς το) σε ένα νέο διάνυσμα  $\mathbf{R}\mathbf{p}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

<sup>1</sup> Με τη γνώση που θα αποκτηθεί στην επόμενη ενότητα (σύνθεσης περιστροφών), είναι εύκολο να φανεί ότι ο  $\mathbf{R}_0^1$  μπορεί να προκύψει από τη σύνθεση δύο διαδοχικών βασικών περιστροφών, δηλαδή του αρχικού πλαισίου γύρω από τον  $x_0$  κατά  $-\pi/2$  και του προκύπτοντος πλαισίου γύρω από τον τρέχοντα άξονα  $z$  (τον  $z_1$ ) κατά  $-\pi/3$ .



Το ποια ερμηνεία δίνεται κάθε φορά στο χρησιμοποιούμενο πίνακα περιστροφής καθορίζεται συνήθως από τα συμφραζόμενα του κειμένου.

### 2.3.2. Σύνθεση Περιστροφών

Έστω ότι ο πίνακας  $\mathbf{R}_0^1$  στην (2.3.7) παριστάνει ένα μετασχηματισμό περιστροφής μεταξύ των πλαισίων  $ox_1y_1z_1$  και  $ox_0y_0z_0$ . Έστω τώρα ότι προσθέτουμε ένα νέο πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_2y_2z_2$  που σχετίζεται με τα δύο προηγούμενα πλαίσια μέσω μετασχηματισμών περιστροφής. Ένα δοθέν σημείο  $\mathbf{p}$  του χώρου μπορεί να παρασταθεί από τα διανύσματα  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  στα τρία πλαίσια συντεταγμένων. Η σχέση μεταξύ αυτών των παραστάσεων του  $\mathbf{p}$  δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις.

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.3.18)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.3.19)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.3.20)$$

όπου οι πίνακες  $\mathbf{R}_0^1$  και  $\mathbf{R}_0^2$  παριστάνουν περιστροφές σε σχέση με τον άξονα  $ox_0y_0z_0$ , ενώ ο πίνακας  $\mathbf{R}_1^2$  παριστάνει μια περιστροφή σε σχέση με το πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$ . Αντικαθιστώντας την (2.3.20) στην (2.3.18) παίρνουμε τη σχέση

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.3.21)$$

η οποία συγκρινόμενη με την (2.3.19) μας δίνει την ταυτοτική σχέση

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \quad (2.3.22)$$

Η σχέση (2.3.22) συνιστά το **νόμο σύνθεσης** για τους μετασχηματισμούς περιστροφής. Μας λέει ότι, για να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου  $\mathbf{p}$  από την παράστασή του  $\mathbf{p}_2$  ως προς το πλαίσιο  $ox_2y_2z_2$  στην παράστασή του  $\mathbf{p}_0$  στο πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$ , μπορούμε πρώτα να το μετασχηματίσουμε στις συντεταγμένες  $\mathbf{p}_1$  στο πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$  μέσω του μετασχηματισμού  $\mathbf{R}_1^2$  και στη συνέχεια να μετασχηματίσουμε το  $\mathbf{p}_1$  στο  $\mathbf{p}_0$  χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό  $\mathbf{R}_0^1$ . Είναι προφανές από την ανάλυση που προηγήθηκε ότι ο νόμος σύνθεσης των περιστροφών επεκτείνεται εύκολα, ώστε να εκφράζει τη σύνθεση  $n > 2$  διαδοχικών περιστροφών. Σ' αυτή την περίπτωση, η (2.3.22) επεκτείνεται στην  $\mathbf{R}_0^n = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \dots \mathbf{R}_{n-2}^{n-1} \mathbf{R}_{n-1}^n$ .

Η εξίσωση (2.3.22) μπορεί επίσης να ερμηνευτεί ως ακολούθως. Έστω ότι αρχικά τα τρία πλαίσια συντεταγμένων ταυτίζονται. Πρώτα περιστρέφουμε το πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$  σε σχέση με το πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$  σύμφωνα με τον πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}_0^1$ . Στη συνέχεια, με τα πλαίσια  $ox_1y_1z_1$  και  $ox_2y_2z_2$  να ταυτίζονται, περιστρέφουμε το  $ox_2y_2z_2$  σε σχέση με το  $ox_1y_1z_1$  σύμφωνα με το μετασχηματισμό  $\mathbf{R}_1^2$ . Το γινόμενο των πινάκων που εκφράζουν αυτές τις διαδοχικές περιστροφές δίνει τον πίνακα που εκφράζει την περιστροφή του  $ox_2y_2z_2$  σε σχέση με το  $ox_0y_0z_0$

Σε κάθε περίπτωση καλούμε το πλαίσιο, σε σχέση με το οποίο γίνεται η περιστροφή, ως το **τρέχον πλαίσιο**.

### Παράδειγμα 2.3.2 Σύνθεση περιστροφών

Έστω ότι ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  αντιπροσωπεύει μια περιστροφή κατά  $\theta$  βαθμούς γύρω από τον τρέχοντα άξονα  $y$  που ακολουθείται από μια περιστροφή κατά  $\varphi$  βαθμούς γύρω από τον τρέχοντα άξονα  $z$ . Τότε ο πίνακας  $\mathbf{R}$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\varphi & -c_\theta s_\varphi & s_\theta \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ -s_\theta c_\varphi & s_\theta s_\varphi & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.23)$$

όπου  $c_\varphi = \cos \varphi$ ,  $s_\varphi = \sin \varphi$  κλπ. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η σειρά των διαδοχικών περιστροφών και κατά συνέπεια η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζονται οι πίνακες περιστροφής παίζει σημαντικό ρόλο. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι, αντίθετα με την περιγραφή θέσης, οι περιστροφές δεν είναι διανυσματικές ποσότητες, αλλά μητρικές και κατά συνέπεια στη γενική περίπτωση **δεν έχουν** την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Έστω ότι οι παραπάνω περιστροφές εκτελούνται με την αντίθετη σειρά. Τότε ο προκύπτων πίνακας περιστροφής δίνεται από την σχέση

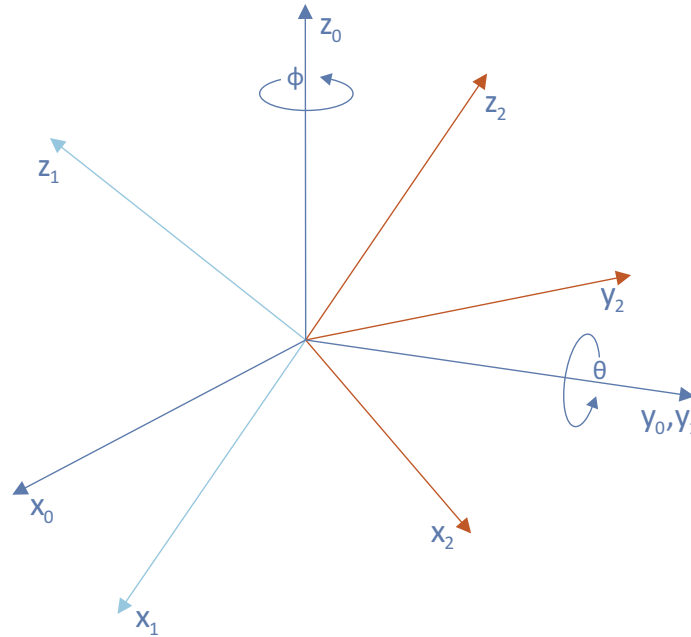
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\varphi & -s_\varphi & s_\theta c_\varphi \\ s_\varphi c_\theta & c_\varphi & s_\theta s_\theta \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.3.24)$$

Συγκρίνοντας τις (2.3.23) και (2.3.24) βλέπουμε ότι η διαφορετική σειρά εκτέλεσης των περιστροφών καταλήγει σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

Μέχρι τώρα οι διαδοχικές περιστροφές γίνονταν ως προς το προκύπτον (τρέχον) κάθε φορά πλαίσιο. Τι γίνεται όμως αν θέλουμε να εκτελέσουμε μια σειρά περιστροφών ως προς ένα σταθερό πάντα πλαίσιο συντεταγμένων; Για παράδειγμα, τι γίνεται όταν μια περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x_0$  ακολουθείται από μια περιστροφή περί τον άξονα  $y_0$  (και όχι τον  $y_1$ ); Σ' αυτή την περίπτωση ο νόμος σύνθεσης των περιστροφών, που είδαμε, δεν ισχύει πλέον. Αποδεικνύεται ότι, στην περίπτωση που οι διαδοχικές περιστροφές εκτελούνται ως προς ένα σταθερό πλαίσιο, τότε αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τους πίνακες περιστροφής **με αντίστροφη φορά** (πρώτος ο τελευταίος κλπ). Ας σημειωθεί ότι οι περιστροφές δεν εκτελούνται με αντίστροφη σειρά. Απλά εκτελούνται σε σχέση με το σταθερό πλαίσιο συντεταγμένων, αντί να εκτελούνται σε σχέση με το κάθε φορά τρέχον πλαίσιο συντεταγμένων. Το επόμενο απλό παράδειγμα εξηγεί πώς προκύπτει η αντίστροφη σειρά πολλαπλασιασμού.

**Παράδειγμα 2.3.3** Περιστροφές ως προς σταθερό πλαίσιο

Έστω ότι ο πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  αντιπροσωπεύει μια περιστροφή  $\theta$  μοιρών γύρω από τον άξονα  $y_0$ , ακολουθούμενη από μια περιστροφή  $\phi$  μοιρών γύρω από τον σταθερό άξονα  $z_0$  (Σχήμα 2-3). Έστω  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ , και  $\mathbf{p}_2$  οι παραστάσεις ενός διανύσματος  $\mathbf{p}$  στα τρία αντίστοιχα πλαίσια συντεταγμένων.



Σχήμα 2-3 Περιστροφές ως προς το βασικό πλαίσιο.

Αρχικά το σταθερό και το τρέχον πλαίσιο συμπίπτουν, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{p}_1 \quad (2.3.25)$$

όπου  $\mathbf{R}_{y,\theta}$  είναι ο βασικός πίνακας περιστροφής περί τον άξονα  $y$ . Επειδή η δεύτερη περιστροφή είναι ως προς το βασικό πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$  και όχι ως προς το τρέχον πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$ , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{p}_2, \quad (2.3.26)$$

επειδή σ' αυτήν την περίπτωση ο  $\mathbf{R}_{z,\phi}$  θα αντιπροσώπευε μια περιστροφή περί τον τρέχοντα άξονα  $z_1$ . Για να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον κανόνα σύνθεσης των περιστροφών, θα πρέπει με κάποιον τρόπο να κάνουμε το τρέχον και το βασικό πλαίσιο να ταυτίζονται (στην περίπτωσή μας να συμπίπτουν οι  $z_0$  και  $z_1$ ). Για να γίνει αυτό, θα πρέπει πρώτα να **αναιρέσουμε** την προηγούμενη περιστροφή, να περιστρέψουμε περί τον άξονα  $z_0$  και να επαναλάβουμε τον αρχικό μετασχηματισμό, δηλαδή

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{y,-\theta} \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{p}_2 \quad (2.3.27)$$

Η (2.3.27) είναι η σωστή σχέση και όχι η (2.3.26). Τώρα, αν αντικαταστήσουμε την (2.3.27) στην (2.3.25) θα πάρουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{y,-\theta} \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{p}_2 \\ &= \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Εξετάζοντας την (2.3.28) βλέπουμε ότι, όταν έχουμε σύνθεση διαδοχικών περιστροφών ως προς το σταθερό πλαίσιο συντεταγμένων, χρησιμοποιούμε τους ίδιους βασικούς πίνακες περιστροφής, αλλά τους πολλαπλασιάζουμε με αντίστροφη σειρά. ■

Συνοψίζοντας, μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις σύνθεσης περιστροφών:

1. Με δεδομένα τα πλαίσια συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$  και  $ox_1y_1z_1$  και ενός πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}_0^1$ , που τα συνδέει, και δεδομένου ενός τρίτου πλαισίου  $ox_2y_2z_2$ , που έχει προκύψει μέσω της περιστροφής  $\mathbf{R}_1^2$  σε σχέση με το τρέχον πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$ , τότε η σχέση που συνδέει τους τρεις πίνακες μετασχηματισμού είναι η

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \quad (2.3.29)$$

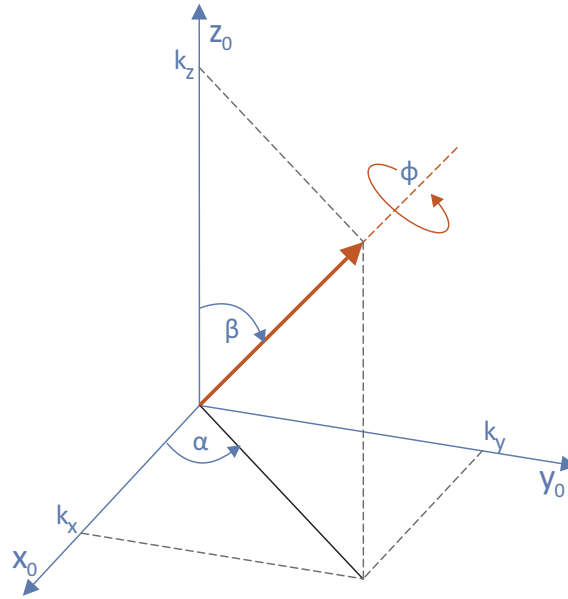
2. Αν η δεύτερη περιστροφή γίνεται ως προς το σταθερό πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$ , τότε η σχέση που συνδέει τους τρεις πίνακες περιστροφής είναι η

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{R}_0^1 \quad (2.3.30)$$

Σε κάθε περίπτωση ο  $\mathbf{R}_0^2$  παριστάνει το μετασχηματισμό που συνδέει τα πλαίσια  $ox_0y_0z_0$  και  $ox_2y_2z_2$ . Όμως, το πλαίσιο  $ox_2y_2z_2$  που προκύπτει από την (2.3.30) είναι διαφορετικό από το πλαίσιο που προκύπτει από την (2.3.29).

### 2.3.3. Περιστροφή περί τυχαίο άξονα

Οι περιστροφές δεν εκτελούνται πάντα γύρω από κάποιο άξονα συντεταγμένων. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η περιστροφή γύρω από έναν αυθαίρετο άξονα του χώρου. Έστω  $\mathbf{k} = [k_x \ k_y \ k_z]^T$  ένα μοναδιαίο διάνυσμα που είναι εκφρασμένο σε συντεταγμένες του πλαισίου  $ox_0y_0z_0$  και το οποίο ορίζει τον αυθαίρετο άξονα (Σχήμα 2-4). Θέλουμε να βρούμε τον πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}_{k,\varphi}$  που εκφράζει την περιστροφή κατά  $\varphi$  μοίρες γύρω από αυτόν τον άξονα.



Σχήμα 2-4 Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα  $k$ .

Ο απλούστερος τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να περιστρέψουμε το διάνυσμα  $\mathbf{k}$  ώστε να συμπέσει με κάποιον από τους άξονες συντεταγμένων, έστω τον  $z_0$ , μετά να εκτελέσουμε τη ζητούμενη περιστροφή των  $\varphi$  μοιρών γύρω από τον άξονα  $z_0$  και τελικά να περιστρέψουμε το  $\mathbf{k}$  πάλι πίσω στην αρχική του θέση. Από το Σχήμα 2-4 βλέπουμε ότι μπορούμε να περιστρέψουμε το  $\mathbf{k}$  ώστε να συμπέσει με το  $z_0$  αν πρώτα περιστρέψουμε περί τον  $z_0$  κατά  $-\alpha$  και ακολούθως περιστρέψουμε περί τον  $y_0$  κατά  $-\beta$ . Επειδή όλες οι περιστροφές εκτελούνται ως προς το σταθερό πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$ , ο πίνακας  $\mathbf{R}_{\mathbf{k},\varphi}$  μπορεί να προκύψει από τη σχέση

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k},\varphi} = \mathbf{R}_{z,\alpha} \mathbf{R}_{y,\beta} \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,-\beta} \mathbf{R}_{z,-\alpha} \quad (2.3.31)$$

Επειδή το  $\mathbf{k}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα, τότε από το το Σχήμα 2-4 προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, & \cos \alpha &= \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \\ \sin \beta &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, & \cos \beta &= k_z \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις (2.3.32) στην (2.3.31) μπορούμε μετά από αρκετές πράξεις να καταλήξουμε στον ζητούμενο πίνακα περιστροφής [2]:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k},\varphi} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\varphi + c_\varphi & k_x k_y v_\varphi - k_z s_\varphi & k_x k_z v_\varphi + k_y s_\varphi \\ k_x k_y v_\varphi + k_z s_\varphi & k_y^2 v_\varphi + c_\varphi & k_y k_z v_\varphi - k_x s_\varphi \\ k_x k_z v_\varphi - k_y s_\varphi & k_y k_z v_\varphi + k_x s_\varphi & k_z^2 v_\varphi + c_\varphi \end{bmatrix} \quad (2.3.33)$$

όπου  $v_\varphi = \text{vers}(\varphi) = 1 - c_\varphi$ .

**Παράδειγμα 2.3.4.** (Περιστροφή γύρω από τυχαίο, μη βασικό άξονα)

Έστω ότι  $k = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\varphi = 90^\circ$ . Χρησιμοποιώντας το ότι  $k_x = k_y = k_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $v_\theta = 1 - \cos(\pi/2) = 1$  και τις σχέσεις (2.3.32), (2.3.33), ο  $\mathbf{R}_{k,\varphi}$  υπολογίζεται:

$$\mathbf{R}_{k,\varphi} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.244 & 0.91 \\ 0.91 & 0.333 & -0.244 \\ -0.244 & 0.91 & 0.333 \end{bmatrix}$$

## 2.4. Εναλλακτικές περιγραφές του προσανατολισμού και των περιστροφών

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην περιγραφή του προσανατολισμού οι 9 συντελεστές του πίνακα περιγραφής του προσανατολισμού (δηλαδή ενός πίνακα περιστροφής) είναι πλεοναστικοί και δεν είναι όλοι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα ένα συμπαγές σώμα κατέχει το πολύ τρεις περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας και έτσι απαιτούνται το πολύ τρεις ποσότητες για τον καθορισμό του προσανατολισμού του. Αμέσως παρακάτω αναφέρουμε τρεις τρόπους με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε οποιαδήποτε περιστροφή χρησιμοποιώντας τρεις μόνο ανεξάρτητες ποσότητες. Συγκεκριμένα θα αναφέρουμε την παράσταση **άξονα/γωνίας**, την παράσταση με **γωνίες του Euler** και την παράσταση με τις γωνίες **κύλισης-ανύψωσης-στροφής** (roll-pitch-yaw).

### 2.4.1. Παράσταση άξονα/γωνίας

Ένας πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  μπορεί να περιγραφεί από μία μόνο περιστροφή γύρω από κατάλληλα επιλεγμένο άξονα, δηλαδή,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k,\varphi} \quad (2.4.1)$$

όπου  $\mathbf{k}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τον άξονα περιστροφής και  $\varphi$  είναι η γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα  $\mathbf{k}$ . Η εξίσωση (2.4.1) καλείται **παράσταση άξονα γωνίας** του  $\mathbf{R}$ . Δοθέντος ενός πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$  με στοιχεία  $\{r_{ij}\}$ , η γωνία  $\varphi$  και ο άξονας  $\mathbf{k}$  που συνθέτουν την ισοδύναμη παράσταση άξονα/γωνίας δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις [2].

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\text{Tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (2.4.2)$$

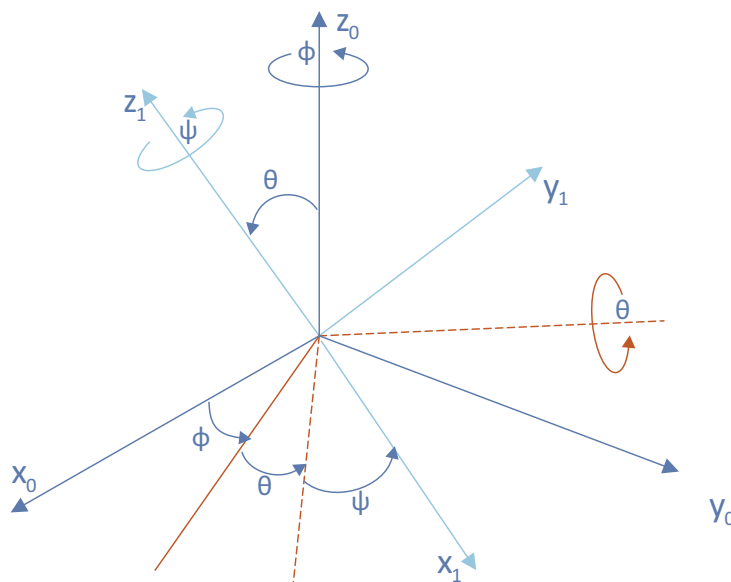
όπου  $Tr$  είναι το ίχνος του  $\mathbf{R}$  και

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin \varphi} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

Η παράσταση άξονα/γωνίας δεν είναι μοναδική, επειδή μια περιστροφή κατά  $-\varphi$  γύρω από τον  $-\mathbf{k}$  είναι η ίδια με την περιστροφή κατά  $\varphi$  περί τον  $\mathbf{k}$ . Αν  $\varphi=0$ , τότε ο  $\mathbf{R}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας και ο άξονας περιστροφής δεν ορίζεται.

### 2.4.2. Γωνίες Euler

Ένας άλλος συνηθέστερος τρόπος καθορισμού ενός πίνακα περιστροφής με χρήση τριών μόνο ανεξάρτητων ποσοτήτων είναι με χρήση των καλούμενων **γωνιών Euler**. Έστω το σταθερό πλαίσιο συντεταγμένων  $ox_0y_0z_0$  και το περιστρεμμένο πλαίσιο  $ox_1y_1z_1$  που φαίνεται στο Σχήμα 2-5. Μπορούμε να καθορίσουμε τον προσανατολισμό του πλαισίου  $ox_1y_1z_1$  σε σχέση με το πλαίσιο  $ox_0y_0z_0$  με τρεις γωνίες  $(\theta, \varphi, \psi)$ , που είναι γνωστές σαν γωνίες Euler. Ο προσανατολισμός αυτός επιτυγχάνεται ως εξής: Πρώτα γίνεται η περιστροφή περί τον άξονα  $z$  κατά τη γωνία  $\varphi$ . Κατόπιν γίνεται περιστροφή γύρω από τον τρέχοντα άξονα  $y$  κατά τη γωνία  $\theta$ . Τέλος, γίνεται η περιστροφή γύρω από τον τρέχοντα άξονα  $z$  κατά τη γωνία  $\psi$ . Αν εκφράσουμε τον τελικό πίνακα περιστροφής συναρτήσει των βασικών διαδοχικών πινάκων περιστροφής παίρνουμε



Σχήμα 2-5 Γωνίες Euler.

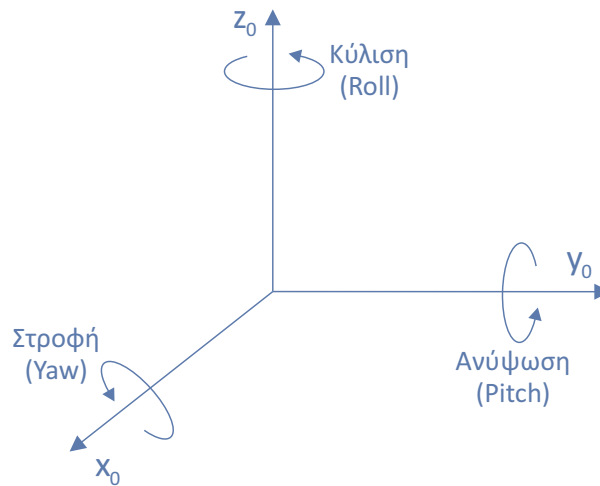
$$\mathbf{R}_0^1 = \mathbf{R}_{z, \varphi} \mathbf{R}_{y, \theta} \mathbf{R}_{z, \psi} \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή η εύρεση των γωνιών Euler από τον πίνακα περιστροφής  $\mathbf{R}$ , θα μας απασχολήσει σε επόμενο κεφάλαιο.

### 2.4.3. Γωνίες κύλισης-ανύψωσης-στροφής (roll-pitch-yaw angles)

Ένας πίνακας περιστροφής  $\mathbf{R}$  μπορεί επίσης να περιγραφεί από το γινόμενο διαδοχικών, με συγκεκριμένη σειρά, περιστροφών περί τους αρχικούς άξονες συντεταγμένων  $x_0$ ,  $y_0$  και  $z_0$ . Αυτές οι περιστροφές ορίζουν τις γωνίες **κύλισης (roll)**, **ανύψωσης (pitch)** και **στροφής (yaw)**, τις οποίες συμβολίζουμε με  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  και οι οποίες δείχνονται στο Σχήμα 2-6.



Σχήμα 2-6 Γωνίες Roll-Pitch-Yaw.

Η σειρά εκτέλεσης των περιστροφών είναι η x-y-z, δηλαδή πρώτα μια στροφή περί τον άξονα  $x_0$  κατά μια γωνία  $\psi$ , κατόπιν μια ανύψωση περί τον άξονα  $y_0$  κατά μια γωνία  $\theta$  και τελικά μια κύλιση περί τον άξονα  $z_0$  κατά μια γωνία  $\varphi$ . Επειδή οι διαδοχικές περιστροφές εκτελούνται ως προς το βασικό πάντα πλαίσιο συντεταγμένων, ο προκύπτων πίνακας μετασχηματισμού δίνεται από την

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_0^1 &= \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\psi} \\
&= \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \tag{2.4.5}
\end{aligned}$$



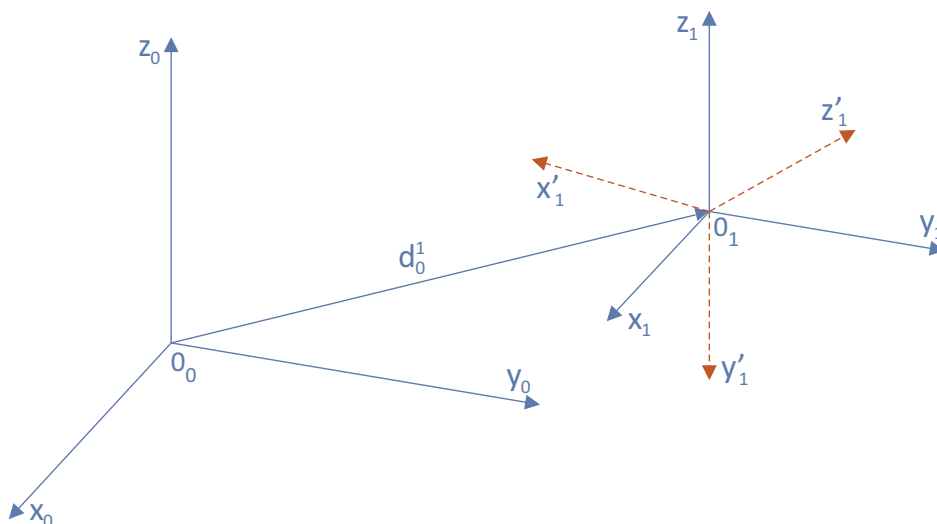
$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι, αντί να πάρουμε τις συγκεκριμένες περιστροφές με τη συγκεκριμένη σειρά ως προς το βασικό πλαίσιο, θα μπορούσαμε να πάρουμε τις ίδιες περιστροφές ως προς το τρέχον κάθε φορά πλαίσιο, αλλά με ανεστραμμένη σειρά (δηλαδή κύλισης - ανύψωση - στροφή) και να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

## 2.5. Ομογενείς μετασχηματισμοί

Μέχρι τώρα εξετάσαμε πίνακες μετασχηματισμού που αντιστοιχούν μόνο σε περιστροφές του νέου πλαισίου συντεταγμένων σε σχέση με κάποιο άλλο πλαίσιο, όπου τα δύο πλαίσια θεωρήσαμε ότι είχαν κοινή αρχή. Σ' αυτό το τμήμα του κεφαλαίου θα εξετάσουμε την πιο γενική περίπτωση όπου, εκτός από την περιστροφή, συμβαίνει και μετατόπιση της αρχής του νέου πλαισίου σε σχέση με κάποιο άλλο πλαίσιο που θεωρούμε προγενέστερο του μετασχηματισμού.

Αρχικά, ας θεωρήσουμε το σύστημα συντεταγμένων  $o_1x_1y_1z_1$  που έχει προκύψει από το  $o_0x_0y_0z_0$  κατόπιν παράλληλης μετατόπισής του κατά απόσταση  $|\mathbf{d}|$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-7. Δηλαδή, τα  $i_0, j_0, k_0$  είναι παράλληλα στα  $i_1, j_1, k_1$  αντίστοιχα. Το διάνυσμα  $\mathbf{d}_0^1$  είναι το διάνυσμα που άγεται από την αρχή  $o_0$  έως την αρχή  $o_1$  και το οποίο εκφράζεται σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων  $o_0x_0y_0z_0$ . Τότε οποιοδήποτε σημείο  $\mathbf{p}$  έχει τις παραστάσεις  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_1$  στα δύο συστήματα συντεταγμένων αντίστοιχα.



Σχήμα 2-7 Συμπαγής κίνηση πλαισίου συντεταγμένων.

Επειδή οι αντίστοιχοι άξονες συντεταγμένων των δύο συστημάτων είναι παράλληλοι, τα διανύσματα  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_1$  συνδέονται με τη σχέση

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.5.1)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} p_{0x} &= p_{1x} + d_{0x}^1 \\ p_{0y} &= p_{1y} + d_{0y}^1 \\ p_{0z} &= p_{1z} + d_{0z}^1 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

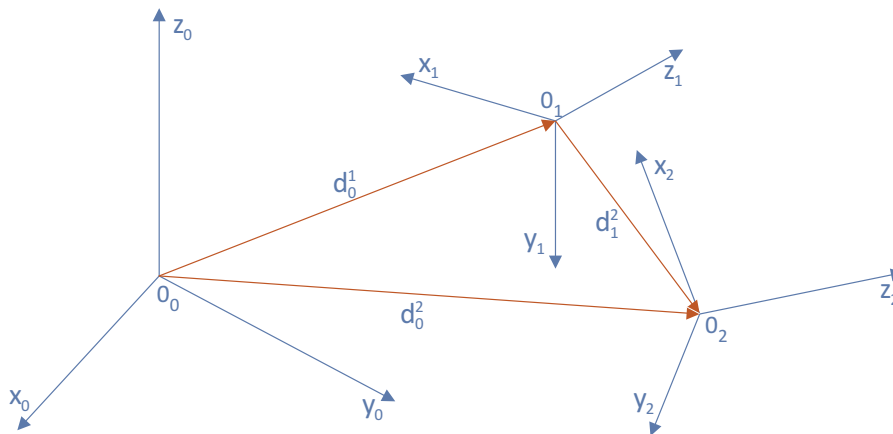
Η γενικότερη μορφή της κίνησης που συνδέει δύο συστήματα συντεταγμένων περιέχει το συνδυασμό μιας καθαρής περιστροφής και μιας καθαρής μετατόπισης. Σ' αυτή την περίπτωση μιλούμε για **συμπαγή κίνηση**. Το πλαίσιο  $o_1x_1'y_1'z_1'$ , στο Σχήμα 2-7, έχει προκύψει από το  $o_0x_0y_0z_0$  κατόπιν περιστροφής του πλαισίου και μετατόπισης του κέντρου του.

### Ορισμός

Ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \mathbf{d} \quad (2.5.3)$$

λέγεται ότι ορίζει μια **συμπαγή κίνηση**, αν ο  $\mathbf{R}$  είναι ορθογώνιος. Ας σημειωθεί εδώ ότι ο ορισμός της συμπαγούς κίνησης στη γενική του μορφή περιλαμβάνει και την περίπτωση κατά την οποία  $\det \mathbf{R} = -1$ . Στο παρόν όμως κείμενο δεν θα χρειασθεί να χρησιμοποιήσουμε την πιο γενική μορφή του ορισμού, αλλά θα αρκεστούμε στην περίπτωση όπου  $\det \mathbf{R} = +1$ , δηλαδή  $\mathbf{R} \in SO(3)$ .



Σχήμα 2-8 Διαδοχικές συμπαγείς κινήσεις.

Αν τώρα έχουμε δύο συμπαγείς κινήσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2-8, δηλαδή

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.5.4)$$

και

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2, \quad (2.5.5)$$

τότε η σύνθεσή τους ορίζει μια τρίτη συμπαγή κίνηση, την οποία μπορούμε να εκφράσουμε, αν αντικαταστήσουμε την έκφραση του  $\mathbf{p}_1$  από την (2.5.5) στην (2.5.4) και να καταλήξουμε στην

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.5.6)$$

Επειδή η σχέση μεταξύ των  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_2$  είναι επίσης μια συμπαγής κίνηση, μπορούμε ισοδύναμα να την περιγράψουμε μέσω της εξίσωσης

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2 \quad (2.5.7)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.5.7) και (2.5.6), προκύπτουν οι ακόλουθες ταυτότητες

$$\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 \quad (2.5.8)$$

$$\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \quad (2.5.9)$$

Η εξίσωση (2.5.8) δείχνει ότι, οι μετασχηματισμοί προσανατολισμού (περιστροφές) μπορούν απλά να πολλαπλασιαστούν μεταξύ τους και η εξίσωση (2.5.9) δείχνει ότι το διάνυσμα  $\mathbf{d}_0^2$  από την αρχή  $o_0$  έως την αρχή  $o_2$  μπορεί να προκύψει από το διανυσματικό άθροισμα του διανύσματος  $\mathbf{d}_0^1$  από την αρχή  $o_0$  στην αρχή  $o_1$  και του διανύσματος  $\mathbf{d}_1^2$  από το  $o_1$  στο  $o_2$  εκφρασμένο όμως (μέσω του μετασχηματισμού  $\mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2$ ) ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $o_0x_0y_0z_0$ . Το τελευταίο είναι απολύτως συμβατό με τη γεωμετρική θεώρηση του προβλήματος, αφού για να προστεθούν δύο διανύσματα θα πρέπει να είναι εκφρασμένα ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Μια σύγκριση των δύο αυτών εξισώσεων με την ακόλουθη διανυσματική ταυτότητα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^2 & \mathbf{d}_1^2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 \mathbf{R}_1^2 & \mathbf{R}_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.10)$$

όπου το  $\mathbf{0}$  συμβολίζει το διάνυσμα  $[0 \ 0 \ 0]$ , δείχνει ότι οι συμπαγείς κινήσεις μπορούν να παρασταθούν από ένα σύνολο πινάκων της μορφής

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} \in SO(3) \quad (2.5.11)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο  $\mathbf{R}$  είναι ορθογώνιος, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός  $\mathbf{H}^{-1}$  δίνεται από την σχέση<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Χρησιμοποιείται ο τύπος αντιστροφής  $R^{-1} = R^T$  του ορθογώνιου πίνακα περιστροφής, από κοινού με τον τύπο αντιστροφής μπλοκ πίνακα. Σύμφωνα με αυτόν, για τον μπλοκ πίνακα

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.12)$$

Οι πίνακες μετασχηματισμών της μορφής (2.5.11) ονομάζονται **ομογενείς μετασχηματισμοί**. Για να παραστήσουμε τον μετασχηματισμό της (2.5.3) με ένα πολλαπλασιασμό πινάκων, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του ομογενούς μετασχηματισμού που μόλις δώσαμε και να επαυξήσουμε τα διανύσματα  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_1$  προσθέτοντας τη μονάδα σαν τέταρτο στοιχείο, δηλαδή,

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{P}_0$  και  $\mathbf{P}_1$  είναι γνωστά σαν ομογενείς παραστάσεις των διανυσμάτων  $\mathbf{p}_0$  και  $\mathbf{p}_1$  αντίστοιχα. Μπορεί τώρα εύκολα να δει κανείς ότι ο μετασχηματισμός της μορφής (2.5.3) είναι ισοδύναμος με την (ομογενή) μητρική εξίσωση

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{H}\mathbf{P}_1 = \mathbf{H}_0\mathbf{P}_1, \quad (2.5.14)$$

Το σύνολο όλων των 4x4 πινάκων  $\mathbf{H}$  της μορφής (2.5.11) συμβολίζεται με  $E(3)$  (ο συμβολισμός προκύπτει από τον όρο Euclidean group of order 3). Ένα σύνολο **βασικών ομογενών μετασχηματισμών** που παράγει τον  $E(3)$  δίνεται από τους ακόλουθους πίνακες

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

για καθαρές μετατοπίσεις και από τους πίνακες

$$Rot_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_a & -s_a & 0 \\ 0 & s_a & c_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Rot_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Rot_{z,\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

για καθαρές περιστροφές περί τους άξονες x, y και z αντίστοιχα.

Η πιο γενική μορφή του ομογενούς μετασχηματισμού μπορεί να γραφεί ως

$$M = \left[ \begin{array}{cc} A & B \\ \underline{C} & \underline{D} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} m \\ \} n \end{array} \right\}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} [A-BD^{-1}C]^{-1} & -A^{-1}B[D-CA^{-1}B]^{-1} \\ -D^{-1}C[A-BD^{-1}C]^{-1} & [D-CA^{-1}B]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & d_x \\ n_y & s_y & a_y & d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.17)$$

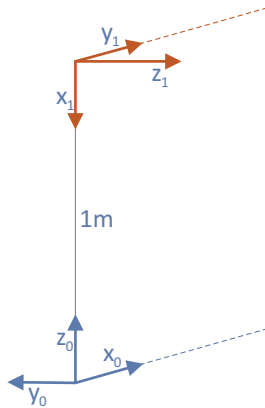
Στην εξίσωση (2.5.17) το  $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$  είναι ένα διάνυσμα που αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση του άξονα  $o_1x_1$  στο σύστημα  $o_0x_0y_0z_0$ , το  $\mathbf{s} = [s_x \ s_y \ s_z]^T$  παριστάνει την κατεύθυνση του  $o_1y_1$  και το  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$  αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση του άξονα  $o_1z_1$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z]^T$  αντιπροσωπεύει το διάνυσμα από την αρχή  $o_0$  ως την αρχή  $o_1$  εκφρασμένο στο πλαίσιο  $o_0x_0y_0z_0$ . **Όσον αφορά τώρα την σύνθεση και την σειρά εκτέλεσης των μετασχηματισμών, ότι ισχύει για τις 3x3 περιστροφές ισχύει και για τους 4x4 ομογενείς μετασχηματισμούς.** Δηλαδή, οι πίνακες ομογενών μετασχηματισμών πολλαπλασιάζονται με την σειρά εκτέλεσης των κινήσεων, όταν εκφράζουν συμπαγείς κινήσεις ως προς το τρέχον κάθε φορά πλαίσιο και με την αντίστροφη σειρά, όταν εκφράζουν συμπαγείς κινήσεις ως προς το βασικό (αρχικό) πλαίσιο συντεταγμένων.

### Παράδειγμα 2.5.1 Σύνθεση ομογενών μετασχηματισμών.

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού  $\mathbf{H}$ , που παριστάνει μια περιστροφή  $\varphi$  μοιρών περί τον τρέχοντα άξονα  $x$ , ακολουθούμενη από μια μετατόπιση  $b$  μονάδων κατά μήκος του τρέχοντα άξονα  $x$ , ακολουθούμενη από μια μετατόπιση  $d$  μονάδων κατά μήκος του τρέχοντα άξονα  $z$ , ακολουθούμενη από μια περιστροφή  $\theta$  μοιρών γύρω από τον τρέχοντα άξονα  $z$ , δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= Rot_{x,\varphi} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & b \\ c_\varphi s_\theta & c_\varphi c_\theta & -s_\varphi & -s_\varphi d \\ s_\varphi s_\theta & s_\varphi c_\theta & c_\varphi & c_\varphi d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

**Παράδειγμα 2.5.2** Εύρεση σχετικής θέσης πλαισίων χρησιμοποιώντας τη σύνθεση διαδοχικών βασικών ομογενών μετασχηματισμών



Ο πίνακας του ομογενούς μετασχηματισμού που εκφράζει τη σχετική θέση και προσανατολισμό του πλαισίου  $o_1x_1y_1z_1$  σε σχέση με το πλαίσιο  $o_0x_0y_0z_0$  μπορεί να υπολογιστεί εύκολα, αν παρατηρήσει κανείς ότι το πλαίσιο  $o_1x_1y_1z_1$  προκύπτει από τις ακόλουθες βασικές διαδοχικές κινήσεις<sup>3</sup>: (α) Περιστροφή του  $o_0x_0y_0z_0$  κατά  $\pi/2$  γύρω από τον άξονα  $x_0$ , (β) Περιστροφή κατά  $-\pi/2$  γύρω από τον προκύπτοντα (τρέχοντα) άξονα  $z$  και (γ) Μετατόπιση κατά  $-1m$  κατά μήκος του τρέχοντα άξονα  $x$ . Έτσι, ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού  $\mathbf{H}_0^1$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{H}_0^1 = Rot_{x,90^\circ} Rot_{z,-90^\circ} Trans_{x,-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 & 0 \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφα, ο πίνακας του ομογενούς μετασχηματισμού  $\mathbf{H}_1^0$  που εκφράζει τη σχετική θέση και προσανατολισμό του πλαισίου  $o_0x_0y_0z_0$  σε σχέση με το πλαίσιο  $o_1x_1y_1z_1$ , μπορεί να υπολογιστεί αν εξετάσουμε ποιες βασικές διαδοχικές κινήσεις οδηγούν από το πλαίσιο 1 στο πλαίσιο 0. Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ότι  $\mathbf{H}_1^0 = (\mathbf{H}_0^1)^{-1}$  και η σχέση (2.5.12) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου. Σ' αυτή την περίπτωση:

$$\mathbf{H}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>3</sup> Ο συνδυασμός κινήσεων δεν είναι μοναδικός. Ένας διαφορετικός συνδυασμός διαδοχικών κινήσεων θα μπορούσε να δώσει το ίδιο αποτέλεσμα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 2<sup>nd</sup> ed., Addison-Wesley, 1989
- [2] M. Spong, M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, 1989.
- [3] W. Wolovich, *Robotics: Basic Analysis and Design*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1985.
- [4] A., J. Chritchlow, *Introduction to Robotics*, Macmillan, New York, 1985.
- [5] J. Engleberger, *Robotics in Practice*, Kogan Page, London 1980.
- [6] Σπύρος Τζαφέστας, *Ρομποτική - Τόμος I (Ανάλυση και Έλεγχος)*, Αθήνα 1994.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Άσκηση 2-1.** Δείξτε ότι ο πίνακας της (2.2.3) είναι ορθογώνιος, Δηλαδή δείξτε ότι τόσο οι στήλες όσο και οι γραμμές τους είναι ορθοκανονικές μεταξύ τους (η κάθε μία έχει μοναδιαίο μήκος και το εσωτερικό γινόμενο τους ανά δύο είναι μηδέν).
- Άσκηση 2-2.** Για έναν ορθογώνιο πίνακα  $R$  ισχύει ότι ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή ισχύει ότι  $R^T R = R R^T = I$ . Δείξτε ότι τα διανύσματα στήλες του  $R$  έχουν μοναδιαίο μήκος και είναι ανά δύο κάθετα (δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν). Επιβεβαιώστε ότι το ίδιο ισχύει και για τα διανύσματα γραμμές του πίνακα.
- Άσκηση 2-3.** Δείξτε ότι αν ο  $R$  είναι ορθογώνιος πίνακας η ορίζουσά του είναι  $\det(R) = \pm 1$ . Αν ο  $R$  είναι πίνακας περιστροφής που σχετίζεται με κάποιο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, δείξτε ότι  $\det(R) = +1$ .
- Άσκηση 2-4.** Αν ο  $R$  είναι ένας πίνακας περιστροφής, να δειχτεί ότι ο αριθμός  $+1$  είναι ιδιοτιμή του  $R$ . Ποιες είναι οι άλλες 2 ιδιοτιμές; Έστω  $\mathbf{k}$  ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $+1$ . Να δοθεί η φυσική σημασία του  $\mathbf{k}$ .
- Άσκηση 2-5.** Αναφέρετε το νόμο σύνθεσης των περιστροφών. Πώς διαφοροποιείται αυτός, αν οι περιστροφές γίνονται ως προς το αρχικό και όχι ως προς το τρέχον κάθε φορά πλαίσιο;
- Άσκηση 2-6.** Να υπολογιστεί ο πίνακας περιστροφής που περιγράφει μια κύλιση (roll) κατά  $\pi/3$ , ακολουθούμενη από μια στροφή (yaw) κατά  $\pi/2$ , ακολουθούμενη από μία ανύψωση (pitch) κατά  $\pi/6$ . Συμβουλευτείτε τις σημειώσεις σας για να δείτε ως προς ποιους άξονες γίνονται οι συγκεκριμένες κινήσεις, ώστε να καθοριστεί η σειρά πολλαπλασιασμού των σχετικών πινάκων.
- Άσκηση 2-7.** Αν το πλαίσιο συντεταγμένων  $o_1 x_1 y_1 z_1$  προκύπτει από το πλαίσιο συντεταγμένων  $o_0 x_0 y_0 z_0$  κατόπιν περιστροφής του κατά  $\pi/2$  γύρω από τον άξονα  $x$ , ακολουθούμενη από μια περιστροφή κατά  $\pi/2$  γύρω από το αρχικό (σταθερό) άξονα  $y$ , να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής  $R$  που περιγράφει τη σύνθεση των μετασχηματισμών. Να σχεδιάσετε το αρχικό και τα προκύπτοντα πλαίσια συντεταγμένων.
- Άσκηση 2-8.** Δίνονται 3 πλαίσια συντεταγμένων  $o_1 x_1 y_1 z_1$ ,  $o_2 x_2 y_2 z_2$ ,  $o_3 x_3 y_3 z_3$ . Να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής  $R_2^3$  αν γνωρίζουμε ότι

$$R_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Άσκηση 2-9.** Κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις επιβεβαιώστε τη μορφή του πίνακα περιστροφής  $R_{k,\theta}$ , όπως αυτή υπάρχει στην εξίσωση (2.3.33)

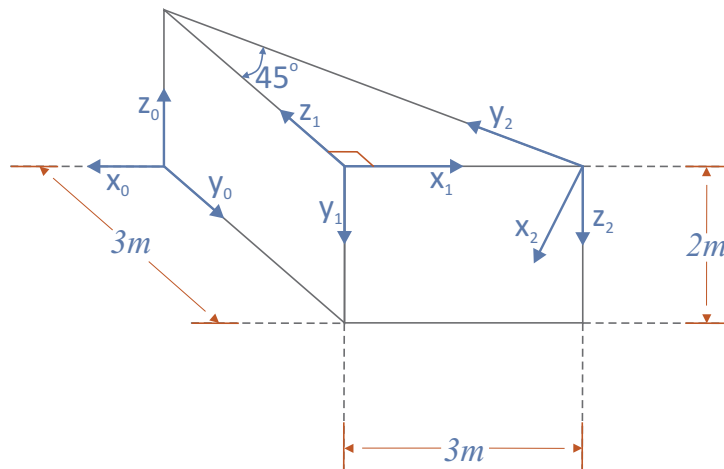
**Άσκηση 2-10.** Έστω ότι ο πίνακας  $R$  παριστάνει μια περιστροφή  $90^\circ$  περί τον άξονα  $y_0$  ακολουθούμενη από μια περιστροφή  $30^\circ$  περί τον άξονα  $z_1$ . Να βρεθούν οι ισοδύναμοι άξονας/γωνία που μπορούν να παράξουν τον ίδιο  $R$ . Να σχεδιαστούν τα αρχικά και παραγόμενα πλαίσια συντεταγμένων καθώς και τον ισοδύναμο διάνυσμα άξονα  $\mathbf{k}$ .

**Άσκηση 2-11.** Για αρκούντως μικρές περιστροφές, έτσι ώστε να ισχύουν οι προσεγγίσεις  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ ,  $\theta^2 \approx 0$ , να παραχθεί ο πίνακας περιστροφής κατά γωνία  $\theta$  γύρω από έναν γενικό άξονα  $\mathbf{k}$ . Βασισμένοι στο αποτέλεσμα δείξτε ότι οι αρκούντως μικρές περιστροφές είναι αντιμεταθετές, δηλαδή η σειρά με την οποία γίνονται αυτές δεν είναι σημαντική.

**Άσκηση 2-12.** Να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο γωνιών Euler  $(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{3})$ . Ποια είναι η κατεύθυνση του άξονα  $x_1$  ως προς το βασικό πλαίσιο συντεταγμένων;

**Άσκηση 2-13.** Περιγράψτε με λίγα λόγια το νόμο σύνθεσης των ομογενών μετασχηματισμών και αναφέρετε πώς υπολογίζεται η περιστροφή και η μετατόπιση του τελικού πλαισίου σε σχέση με το αρχικό. Πως εκφράζεται ο νόμος σύνθεσης αν οι διαδοχικές συμπαγείς κινήσεις των πλαισίων συντεταγμένων γίνονται ως προς το αρχικό (βασικό) πλαίσιο και όχι ως προς το τρέχον κάθε φορά πλαίσιο;

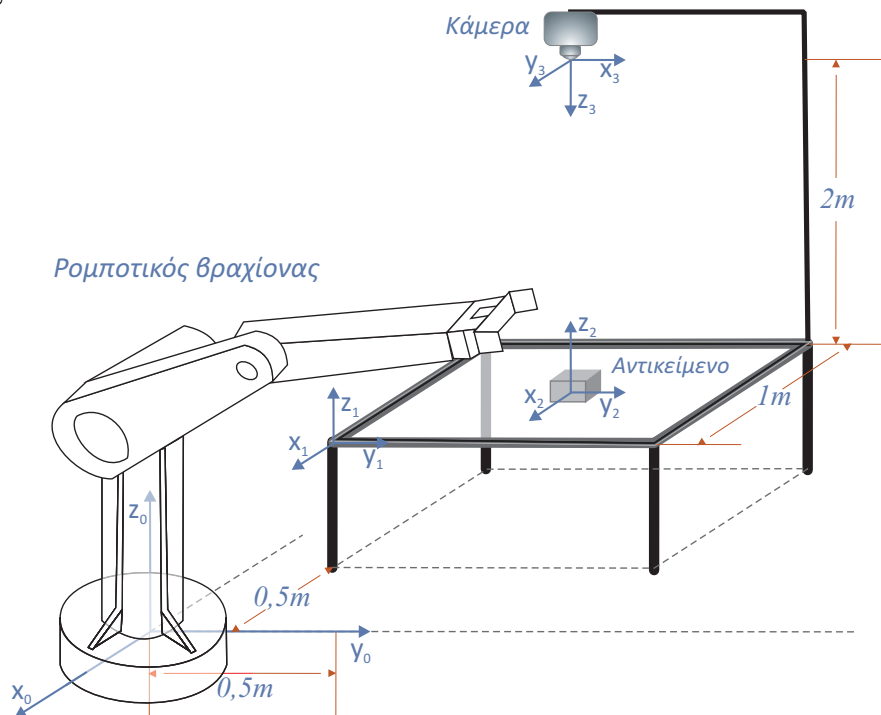
**Άσκηση 2-14.** Εξετάζοντας το Σχήμα A2-1, υπολογίστε τους πίνακες ομογενών μετασχηματισμών  $T_0^1$ ,  $T_1^2$ ,  $T_0^2$  και  $T_2^0$ . Αιτιολογήστε λεπτομερώς την απάντησή σας.





**Σχήμα A2-1.** Πλαίσια συντεταγμένων στο χώρο

**Άσκηση 2-15.** Στο Σχήμα A2-2 που ακολουθεί, ένα ρομπότ είναι τοποθετημένο στο  $(x_0, y_0)$  κατά  $(0.5\text{m}, 0.5\text{m})$  από μία τράπεζα εργασίας. Η πάνω επιφάνεια του τραπεζιού είναι τετράγωνο ακμής 1 μέτρου και απέχει 1 μέτρο από το δάπεδο. Ένα πλαίσιο συντεταγμένων  $o_1x_1y_1z_1$  τοποθετείται στην άκρη του τραπεζιού σύμφωνα με το σχήμα. Ένας κύβος ακμής 20 εκατοστών τοποθετείται στο κέντρο του τραπεζιού και το πλαίσιο συντεταγμένων  $o_2x_2y_2z_2$  τοποθετείται στο κέντρο του. Μια κάμερα βρίσκεται ακριβώς πάνω από το κέντρο του κύβου, 2 μέτρα από το πάνω μέρος του τραπεζιού, και πάνω της είναι προσκολλημένο το πλαίσιο συντεταγμένων  $o_3x_3y_3z_3$ . Να βρεθούν οι ομογενείς μετασχηματισμοί που συνδέουν κάθε ένα από τα πλαίσια συντεταγμένων με το βασικό πλαίσιο  $o_0x_0y_0z_0$ . Να βρεθεί επίσης ο ομογενής μετασχηματισμός που συσχετίζει το πλαίσιο  $o_2x_2y_2z_2$  με το πλαίσιο  $o_3x_3y_3z_3$  της κάμερας.



**Σχήμα A2-2.** Ρομπότ και τράπεζα εργασίας



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΧΩΡΙΚΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ ΚΑΙ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

#### ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2. Χωρικές Περιγραφές και Ομογενείς Μετασχηματισμοί.....	25
2.1. Εισαγωγή.....	25
2.2. Περιγραφές στο χώρο .....	25
2.2.1. Περιγραφή της θέσης .....	25
2.2.2. Περιγραφή του προσανατολισμού .....	26
2.3. Περιστροφές.....	28
2.3.1. Βασικοί πίνακες περιστροφής.....	30
2.3.2. Σύνθεση Περιστροφών.....	33
2.3.3. Περιστροφή περί τυχαίο άξονα .....	36
2.4. Εναλλακτικές περιγραφές του προσανατολισμού και των περιστροφών .....	38
2.4.1. Παράσταση άξονα/γωνίας.....	38
2.4.2. Γωνίες Euler .....	39
2.4.3. Γωνίες κύλισης-ανύψωσης-στροφής (roll-pitch-yaw angles).....	40
2.5. Ομογενείς μετασχηματισμοί.....	41