Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 3

Η Μέθοδος των Κόμβων

του Νικολάου Παπαμάρκου

Με βάση το βιβλίο Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Τόμος ΑΒ

Τάσεις Κόμβων

- Κύκλωμα αποτελείται από *n* κόμβους και *b* κλάδους.
- Ορίζουμε **κόμβο αναφοράς**. Συνήθως η τάση αναφοράς λαμβάνεται ως μηδενική.
- Η **τάση κόμβου** *k* ισούται με τη Διαφορά Δυναμικού του κόμβου με τον κόμβο αναφοράς.

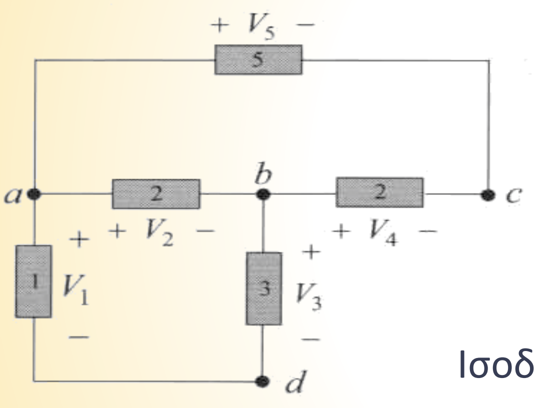
Αν ορίσουμε κόμβο αναφοράς μένουν *n-1* τάσεις κόμβων.

Τάσεις Κόμβων

Παράδειγμα: *n* = 4 κόμβους, *b* = 5 κλάδους.

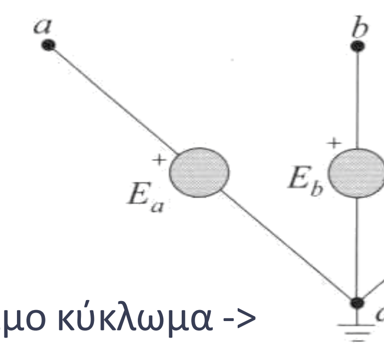
Ορίζουμε κόμβο αναφοράς τον d. Μένουν **n-1=3** τάσεις κόμβων.

Συμβολίζουμε *E* τις τάσεις κόμβων ≠ τάσεις κλάδων με V.



(α)

Ισοδύναμο κύκλωμα ->



(β)

Εύκολα εκφράζουμε τάσεις κλάδων συναρτήσει τάσεων κόμβων.

$$V_1 = E_a, V_2 = E_a - E_b, V_3 = E_b, V_4 = E_b - E_c, V_5 = E_a - E_c$$

Τάσεις Κόμβων

Κάθε κλάδος συνδέει 2 κόμβους.

Επιλογή κόμβου αναφοράς <u>πολύ σημαντική</u>, γιατί επηρεάζει τις εξισώσεις του κυκλώματος.

Κριτήριο Επιλογής κόμβου αναφοράς είναι η <u>**απλοποίηση**</u> του κυκλώματος και ευκολότερη ανάλυσή του.

Μέθοδος Κόμβων

Έστω κύκλωμα με n κόμβους και $n-1$ άγνωστες τάσεις κόμβων.

Μέθοδος Κόμβων:

Προσδιορισμός των $n-1$ ανεξάρτητων γραμμικών εξισώσεων, όπου οι άγνωστες μεταβλητές είναι οι τάσεις των κόμβων.

Σύμβαση: Τάσεις των κόμβων θετικές ως προς τον κόμβο αναφοράς.

Μέθοδος κόμβων ισχυρή, γενική τεχνική για ανάλυση κυκλωμάτων βασισμένη στο ΝΡΚ και το νόμο του Ohm.

Μέθοδος Κόμβων

Βήματα

1. Προσδιορίζουμε κόμβους κυκλώματος.
2. Καθορισμός κόμβου αναφοράς (τάση μηδενική).
3. Καθορίζουμε αυθαίρετα ρεύματα κλάδων. Αριθμούμε n-1 κόμβους, ώστε στον κόμβο k να αντιστοιχεί κομβική τάση E_k.
4. Εφαρμόζουμε ΝΡΚ σε όλους τους κόμβους εκτός της αναφοράς.
5. Εκφράζουμε ρεύματα των κλάδων συναρτήσει των κομβικών τάσεων.
6. Αντικαθιστούμε ρεύματα των κλάδων του Β5 στις εξισώσεις του Β4. Έχουμε έτσι $n-1$ γραμμικές και ανεξάρτητες εξισώσεις με άγνωστες μεταβλητές τις τάσεις των κόμβων E_k.
7. Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα και βρίσκουμε τις τάσεις E_k.
8. Στη συνέχεια μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε όλα τα ρεύματα των κλάδων

Μέθοδος Κόμβων

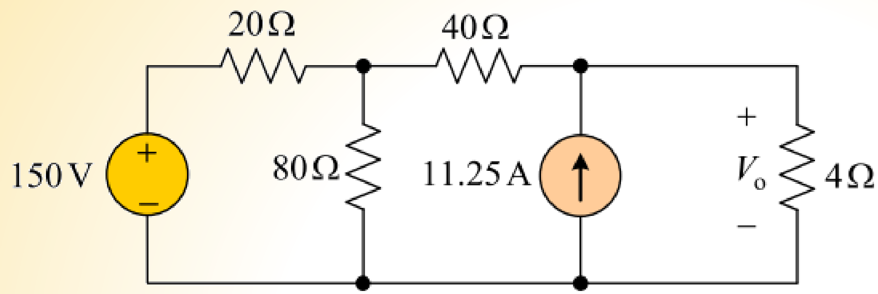
Επιλογή Κόμβου Αναφοράς:

- Να συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους κυκλώματος.
- Να συνδέεται με ένα κλάδο με τους περισσότερους κόμβους του κυκλώματος.
- Να αντιστοιχεί στον αρνητικό πόλο όσο το δυνατό περισσότερων πηγών.

Σε κυκλώματα με πηγές τάσης, μπορούμε με σωστή επιλογή κόμβου αναφοράς, να διευκολύνουμε την εύρεση των τάσεων κόμβων.

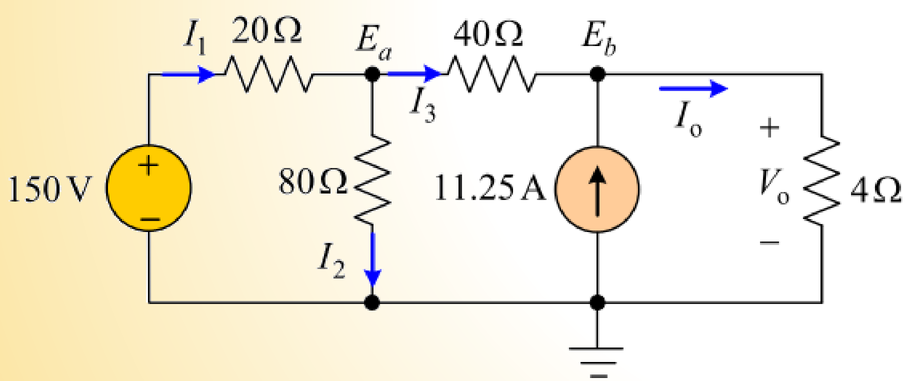
Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 3.1 Στο κύκλωμα του Σχήματος 3.2 να υπολογιστεί με τη μέθοδο των κόμβων η τάση V_o.



Σχήμα 3.2

Λύση



κόμβος a: $I_1 = I_2 + I_3$

κόμβος b: $I_3 + 11.25 = I_o$

$$I_1 = \frac{150 - E_a}{20}$$

$$I_2 = \frac{E_a}{80}$$

$$I_3 = \frac{E_a - E_b}{40}$$

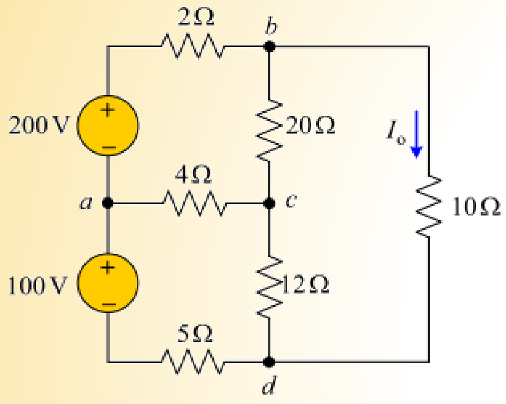
$$7E_a - 2E_b = 600$$

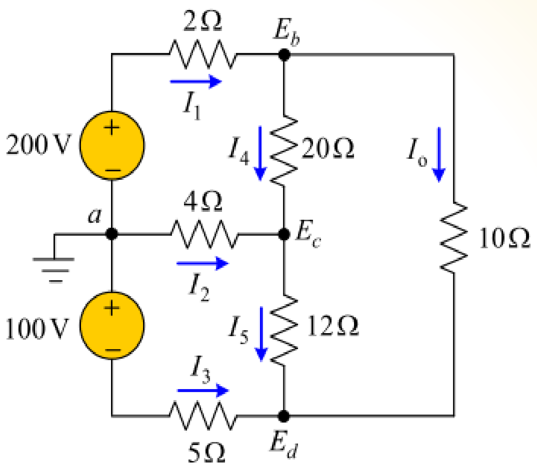
$$-2E_a + 22E_b = 900$$

$E_a = 100\text{V}$ και $E_b = V_o = 50\text{ V}$

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ρεύμα I_o





κόμβος b: $I_1 = I_4 + I_o$

κόμβος c: $I_2 + I_4 = I_5$

κόμβος d: $I_o + I_3 + I_5 = 0$

$$I_1 = \frac{200 - E_b}{2}, \quad I_2 = -\frac{E_c}{4}, \quad I_3 = \frac{-100 - E_d}{5}$$

$$I_4 = \frac{E_b - E_c}{20}, \quad I_5 = \frac{E_c - E_d}{12}, \quad I_o = \frac{E_b - E_d}{10}$$

$$\frac{200 - E_b}{2} = \frac{E_b - E_c}{20} + \frac{E_b - E_d}{10}$$

$$-\frac{E_c}{4} + \frac{E_b - E_c}{20} = \frac{E_c - E_d}{12}$$

$$\frac{E_b - E_d}{10} + \frac{-100 - E_d}{5} + \frac{E_c - E_d}{12} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_b \\ E_c \\ E_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

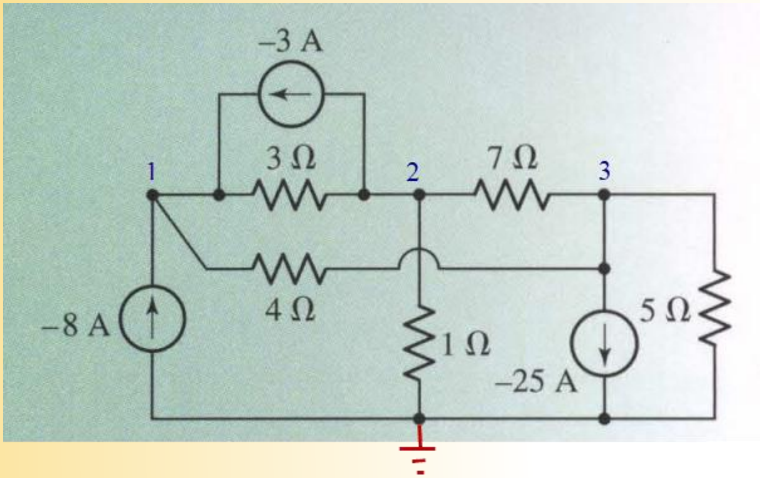
$$E_b = 154.026\text{V}, \quad E_c = 18.350\text{V} \text{ και } E_d = -8.004\text{V}$$

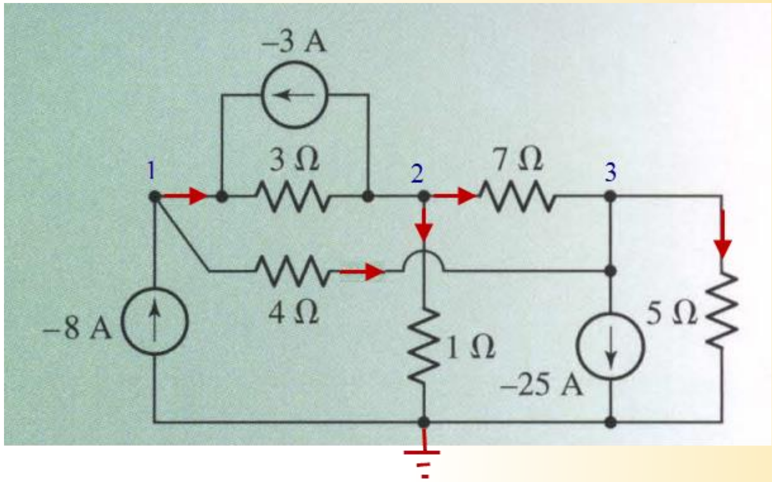
Συνεπώς

$$I_o = \frac{E_b - E_d}{10} = 16.203\text{A}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστούν οι τάσεις των κόμβων





$$-8-3=\frac{V_1-V_2}{3}+\frac{V_1-V_3}{4}$$

$$\frac{V_1-V_2}{3}=-3+\frac{V_2}{1}+\frac{V_2-V_3}{7}$$

$$\frac{V_2-V_3}{7}+\frac{V_1-V_3}{4}=-25+\frac{V_3}{5}$$

$$0.583V_1-0.333V_2-0.25V_3=-11$$

$$-0.333V_1+1.476V_2-0.143V_3=3$$

$$-0.25V_1-0.143V_3+0.593V_3=25$$

$$V_1=5.412\,\mathrm{V}$$

$$V_2=7.736\,\mathrm{V}$$

$$V_3=46.32\,\mathrm{V}$$

Συστηματική Γραφή Εξισώσεων Κόμβων

Σε κυκλώματα χωρίς εξαρτημένες πηγές, οι εξισώσεις κόμβων οδηγούν στο παρακάτω γραμμικό σύστημα.

$$GV = I$$

όπου $V = [v_1 \quad v_2 \quad .... \quad v_{n-1}]^T$ Άγνωστες τάσεις κόμβων

$$I = [i_1 \quad i_2 \quad .... \quad i_{n-1}]^T$$

Ρεύμα που εισέρχεται <u>από πηγές</u> μειον ρεύμα που εξέρχεται στον κόμβο *n*.

$$G = \begin{bmatrix} G_{1,1} & \dots & G_{1,n-1} \\ \dots & G_{k,k} & \dots \\ G_{n-1,1} & \dots & G_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

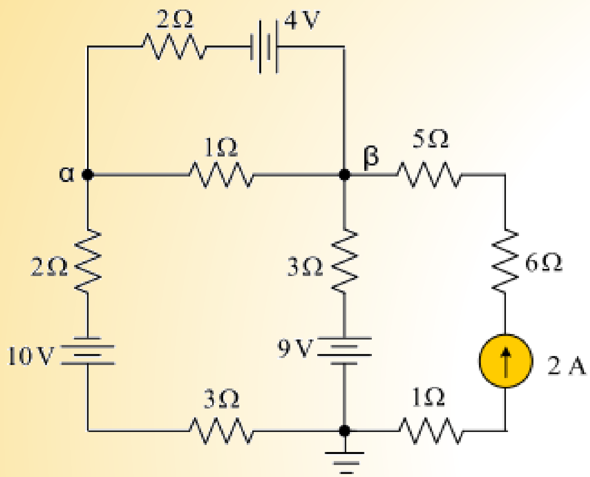
Συμμετρικός πίνακας:

Διαγώνια $G_{k,k}$ θετικά, ίσα με άθροισμα αγωγιμοτήτων στον κόμβο *k*.

Μη-διαγώνια $G_{m,n}$ αρνητικά, ίσα με αρνητικό άθροισμα αγωγιμοτήτων μεταξύ κόμβων *m*, *n*.

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστούν οι τάσεις των κόμβων



$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2+3}+1+\frac{1}{2} & -1-\frac{1}{2}\\ -1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}102 & -90\\ -90 & 105\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{2}-\frac{10}{2+3}\\ 2+\frac{4}{2}+\frac{9}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 7\end{bmatrix}$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα

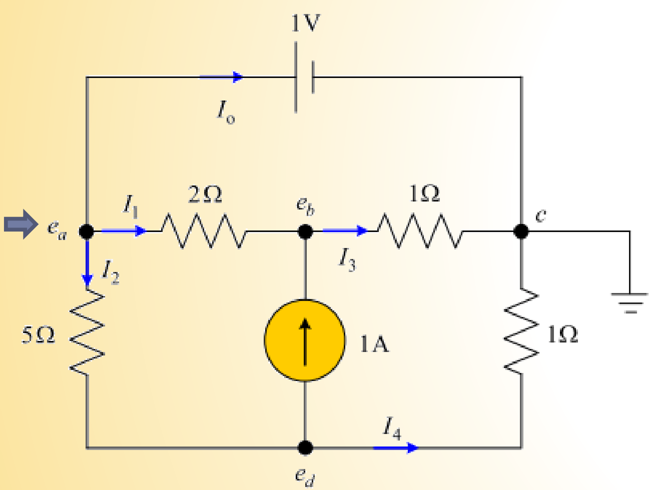
$$\frac{1}{60}\begin{bmatrix}102 & -90\\ -90 & 105\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_\alpha\\ V_\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 7\end{bmatrix}$$

το οποίο έχει την ακόλουθη λύση

$$\begin{bmatrix}V_\alpha\\ V_\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.654\\ 6.808\end{bmatrix}\text{V}$$

Προφανείς Εξισώσεις

Σε πολλά κυκλώματα που περιέχουν πηγές τάσης και με κατάλληλη επιλογή του κόμβου αναφοράς μπορούμε από την αρχή, με απλή εποπτεία του κυκλώματος, να προσδιορίσουμε είτε ορισμένες από τις τάσεις των κόμβων είτε να βρούμε ορισμένες προφανείς εξισώσεις μεταξύ αυτών



Εφόσον η τάση e_a είναι γνωστή και ίση με 1 V χρειάζεται να πάρουμε μόνο τις δύο εξισώσεις στους κόμβους b και d. Είναι

κόμβος b: $I_3 = I_1 + 1$

κόμβος d: $I_2 = I_4 + 1$

$$I_1 = \frac{e_a - e_b}{2} = \frac{1 - e_b}{2}$$

$$I_2 = \frac{e_a - e_d}{5} = \frac{1 - e_d}{5}$$

$$I_3 = e_b \quad \text{και} \quad I_4 = e_d$$

Τις σχέσεις αυτές τις αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κόμβων οπότε προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$e_b = \frac{1 - e_b}{2} + 1 \quad \text{και} \quad \frac{1 - e_d}{5} = e_d + 1$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει τιμές

$$e_b = 1\text{V} \quad \text{και} \quad e_d = -\frac{2}{3}\text{V}$$

Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στις ανωτέρω εξισώσεις των ρευμάτων βρίσκουμε ότι

$$I_1 = 0 \qquad I_2 = \frac{1}{3}\text{A}$$

$$I_3 = 1\text{A} \qquad I_4 = -\frac{2}{3}\text{A}$$

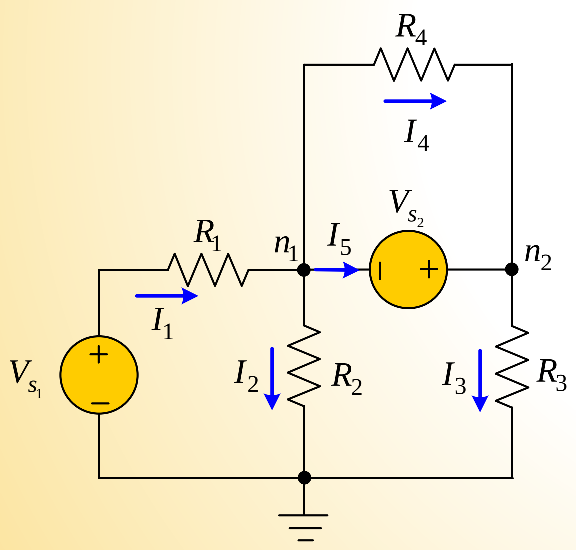
Τώρα, από την εξίσωση του κόμβου a προκύπτει ότι το ρεύμα I_o είναι ίσο με

$$I_o = -I_1 - I_2 = -\frac{1}{3}\text{A}$$

Υπερκόμβος

Αν πηγή τάσης δε συνδέεται άμεσα με τον κόμβο αναφοράς, αλλά βρίσκεται μεταξύ 2 άλλων κόμβων λέγεται <u>επιπλέουσα τάση</u> (floating voltage).

Η μέθοδος κόμβων θέλει προσοχή, π.χ.



Το ρεύμα I_5 δεν εκφράζεται συναρτήσει των V_{n1} και V_{n2}.

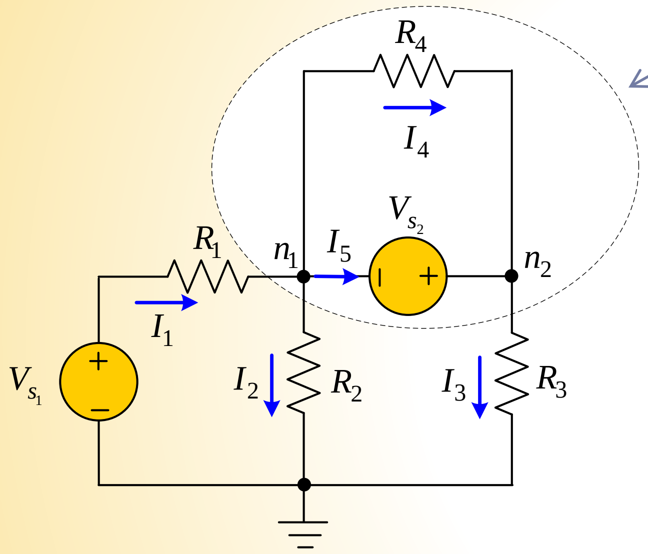
Έτσι θα έχουμε το ρεύμα I_5 ως άγνωστη μεταβλητή.

Φυσικά μπορούμε να πούμε ότι

$$V_{s2} = V_{n2} - V_{n1}$$

Υπερκόμβος

Μπορούμε να ορίσουμε τον εξής **υπερκόμβο** (super node).



Για τον υπερκόμβο ισχύει ότι

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_{s1} - V_{n1}}{R_1} &= \frac{V_{n1}}{R_2} + \frac{V_{n2}}{R_3} \\ V_{n1} + V_{s2} &= V_{n2} \end{aligned}\right\}$$

Έτσι έχουμε ένα σύστημα μόνο με V_{n1} , V_{n2}

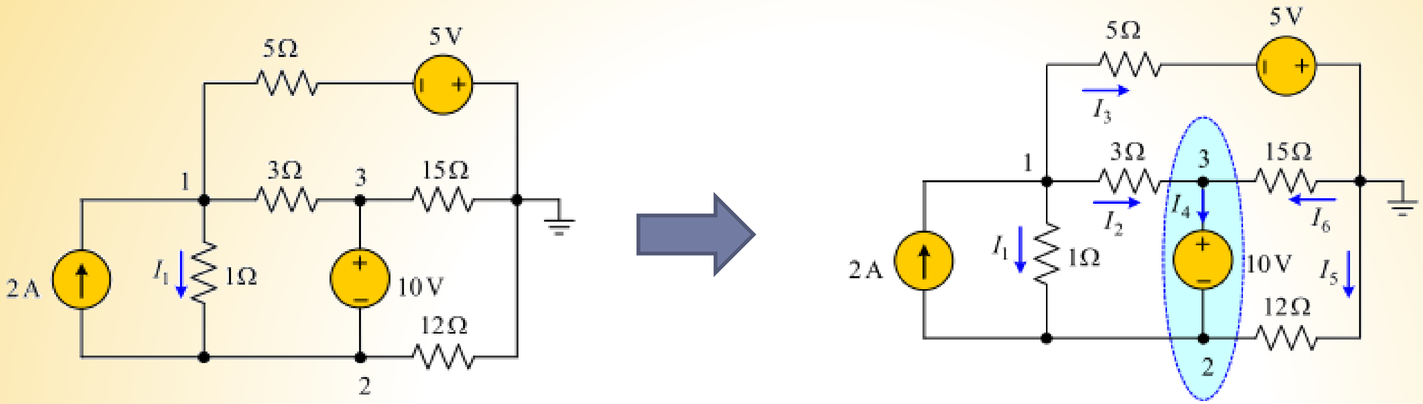
Άρα λύνουμε παρόμοιες καταστάσεις με

α) νόμο ρευμάτων στον υπερκόμβο

β)μια εσωτερική εξίσωση στον υπερκόμβο.

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί το ρεύμα I_1



κόμβος 1: $I_1+I_2+I_3=2$

υπερκόμβος: $I_2+I_6+I_5+I_1=2$ $\qquad E_3=E_2+10$

όπου

$$I_1=\frac{E_1-E_2}{1},\quad I_2=\frac{E_1-E_3}{3},\quad I_3=\frac{E_1+5}{5}$$

$$I_5=\frac{-E_2}{12}\quad \text{και}\quad I_6=\frac{-E_3}{15}$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κόμβων και παίρνουμε

$$\frac{E_1-E_2}{1}+\frac{E_1-E_3}{3}+\frac{E_1+5}{5}=2$$

$$\frac{E_1-E_3}{3}+\frac{-E_3}{15}+\frac{-E_2}{12}+\frac{E_1-E_2}{1}=2$$

Αντικαθιστούμε το E_3 και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα ως προς τις τάσεις E_1 και E_2:

$$23E_1-20E_2=65$$

$$80E_1-89E_2=360$$

Η επίλυση του συστήματος δίνει

$$E_1=-3.166V \quad \text{και} \quad E_2=-6.89V$$

Έτσι τελικά

$$I_1=\frac{E_1-E_2}{1}=3.725\,\text{A}$$

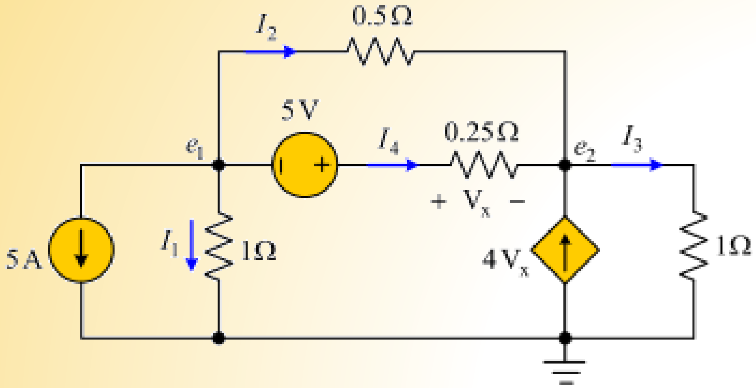
Μέθοδος Κόμβων σε εξαρτημένες πηγές

Ίδια μεθοδολογία με τις κανονικές πηγές με τον ακόλουθο επιπλέον κανόνα :

Γιά κάθε σχέση εξάρτησης, βάζουμε μια πρόσθετη εξίσωση που περιγράφει την εξάρτηση.

Παράδειγμα 6

Να υπολογιστούν οι τάσεις των κόμβων



Στους κόμβους e_1 και e_2 παίρνουμε τις εξισώσεις:

$$I_1 + I_2 + I_4 = -5$$

$$I_4 + I_2 + 4V_x = I_3$$

Επίσης, ως πρόσθετη εξίσωση λόγω της εξαρτημένης πηγής έχουμε τη σχέση

$$V_x = 0.25 I_4$$

Οι σχέσεις για τα ρεύματα των κλάδων είναι

$$I_1 = e_1$$
$$I_2 = 2e_1 - 2e_2$$
$$I_3 = e_2$$
$$I_4 = 4e_1 - 4e_2 + 20$$

Αντικαθιστούμε την V_x και τα ρεύματα στις εξισώσεις των κόμβων, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$7e_1 - 6e_2 = -25$$

$$-10e_1 + 11e_2 = 40$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε

$$e_1 = -\frac{35}{17}\,\text{V} \quad \text{και} \quad e_2 = \frac{30}{17}\,\text{V}$$