Ηλεκτρικά Κυκλώματα-Κεφάλαιο 5

Κρουστική Απόκριση-Εξισώσεις Κατάστασης

Νικολάου Παπαμάρκου

Κρουστική Απόκριση

Κρουστική Απόκριση (Impulse Response) $h(t)$

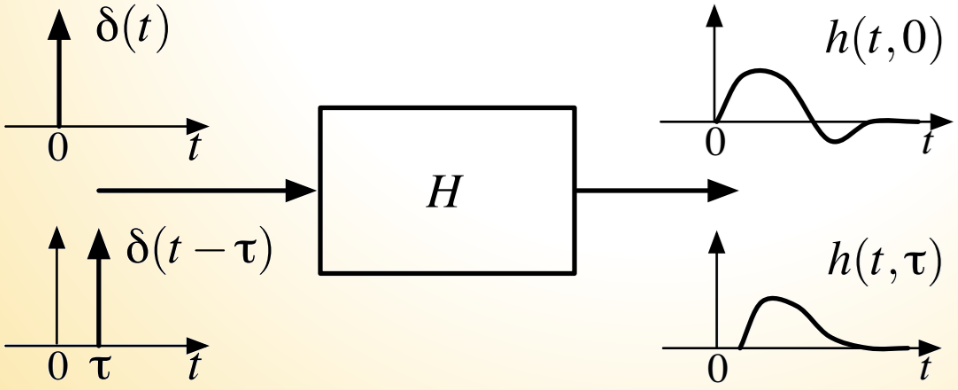
Απόκριση ενός κυκλώματος όταν:

α) Η διέγερση είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$

β) Αρχικές Συνθήκες Μηδέν (Απόκριση μηδενικής κατάστασης)

Για $t = 0^-$, τα στοιχεία είναι αφόρτιστα.

Για $t = 0^+$, λόγω $\delta(t)$ έχουμε «άπειρη» στιγμιαία διέγερση κυκλώματος.



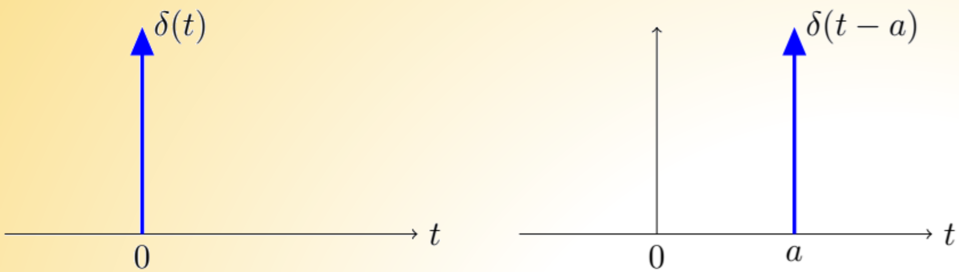
Για $t = 0^-$, τα στοιχεία είναι αφόρτιστα.

Για $t = 0^+$, λόγω $\delta(t)$ έχουμε «άπειρη» στιγμιαία διέγερση κυκλώματος.

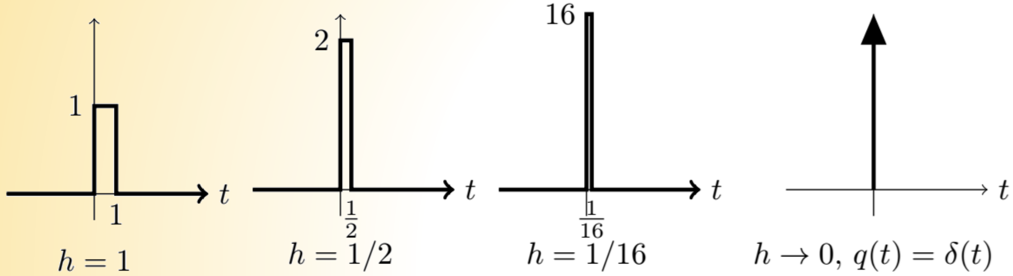
Ασυνέχεια μεταξύ 0^- και 0^+, λόγω απότομης εισόδου άπειρης ενέργειας.

Η κρουστική συνάρτηση δεν είναι πραγματικό σήμα, αλλά χρήσιμη για μαθηματικούς λόγους.

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$



Η $\delta(t)$ δεν είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση. Ανήκει στην κατηγορία των **γενικευμένων συναρτήσεων**



$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} q_h(t)$$

Ορισμός

$$\delta(t) = u'(t) \Rightarrow \int \delta(t)\,dt = u(t)$$

Ιδιότητες

$$\int_c^d f(t)\delta(t-t_o)dt = \begin{cases} f(t_o), \alpha\nu \;\; c < t_o < d \\ 0, \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \neq 0 \\ \infty & \text{if } t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad \int_c^d f(t)\delta(t)\,dt = \begin{cases} f(0) & \text{if } c < 0 < d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \qquad \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad \int_{0^+}^{\infty} \delta(t)\,dt = 0 \qquad \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$$

Μοναδιαία Βηματική Απόκριση

Μοναδιαία Βηματική Απόκριση (Unit Step Response) α(t)

Απόκριση ενός κυκλώματος στην μοναδιαία βηματική συνάρτηση u(t).

Η κρουστική απόκριση ενός χρονικά αμετάβλητου γραμμικού κυκλώματος ισούται με την παράγωγο της βηματικής απόκρισης.

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

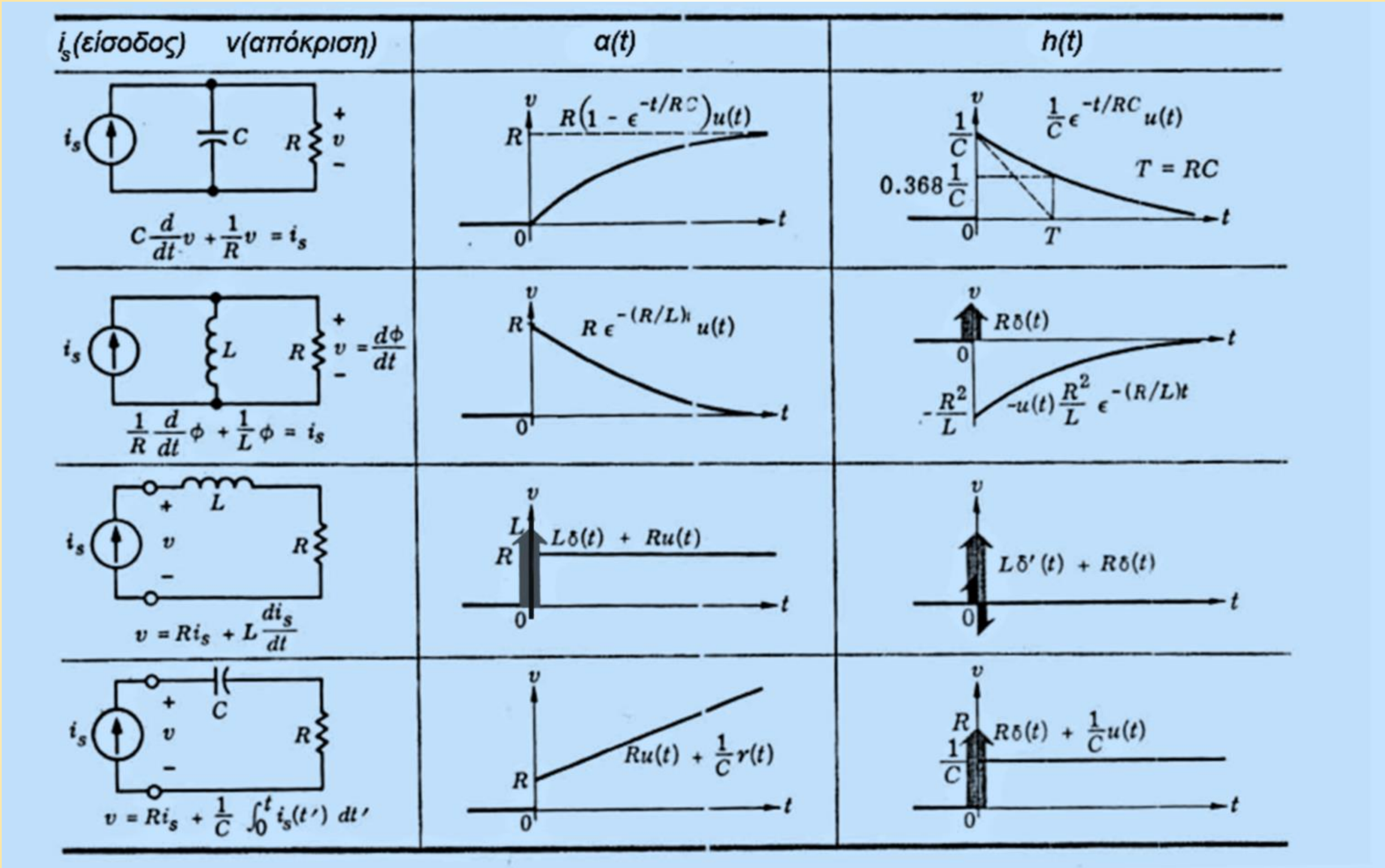
Τρόπος υπολογισμού της $h(t)$

Κρουστική απόκριση

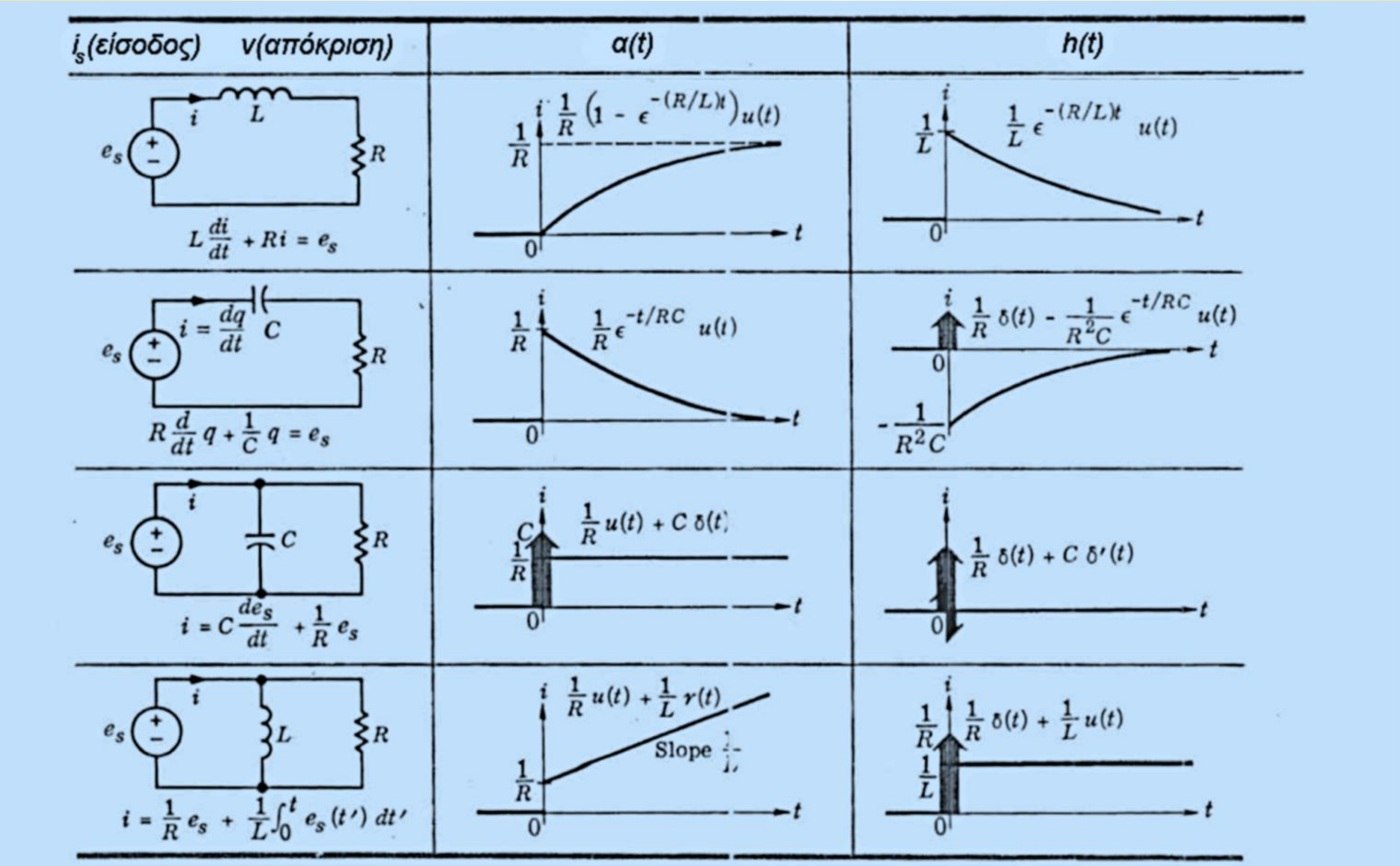
Βηματική απόκριση

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow h(t) = \frac{da(t)}{dt}$$

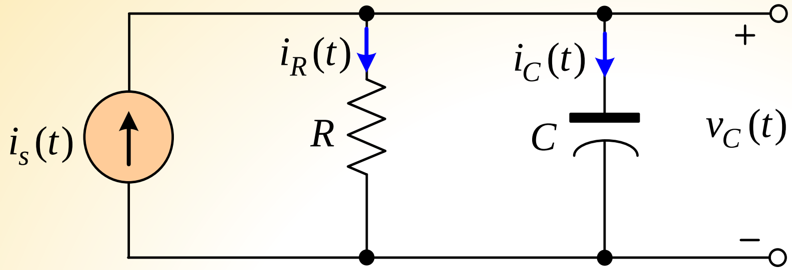
Μεθοδολογία: Διεγείρουμε το κύκλωμα με την $u(t)$ και βρίσκουμε την $a(t)$. Στη συνέχεια, η κρουστική απόκριση προσδιορίζεται ως η παράγωγος της $\alpha(t)$.



i_s(είσοδος) v(απόκριση)
α(t)
h(t)
$C\frac{d}{dt}v + \frac{1}{R}v = i_s$
$R\left(1 - \epsilon^{-t/RC}\right)u(t)$
$\frac{1}{C}\epsilon^{-t/RC}u(t)$
$T = RC$
$0.368\frac{1}{C}$
$v = \frac{d\phi}{dt}$
$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\phi + \frac{1}{L}\phi = i_s$
$R\epsilon^{-(R/L)t}u(t)$
$R\delta(t)$
$-u(t)\frac{R^2}{L}\epsilon^{-(R/L)t}$
$v = Ri_s + L\frac{di_s}{dt}$
$L\delta(t) + Ru(t)$
$L\delta'(t) + R\delta(t)$
$v = Ri_s + \frac{1}{C}\int_0^t i_s(t')\,dt'$
$Ru(t) + \frac{1}{C}r(t)$
$R\delta(t) + \frac{1}{C}u(t)$


i_s(είσοδος)
v(απόκριση)
α(t)
h(t)
$L\frac{di}{dt} + Ri = e_s$
$\frac{1}{R}\left(1 - \epsilon^{-(R/L)t}\right)u(t)$
$\frac{1}{L}\epsilon^{-(R/L)t}\,u(t)$
$i = \frac{dq}{dt}$
$R\frac{d}{dt}q + \frac{1}{C}q = e_s$
$\frac{1}{R}\epsilon^{-t/RC}\,u(t)$
$\frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}\epsilon^{-t/RC}\,u(t)$
$-\frac{1}{R^2C}$
$i = C\frac{de_s}{dt} + \frac{1}{R}e_s$
$\frac{1}{R}u(t) + C\,\delta(t)$
$\frac{1}{R}\delta(t) + C\,\delta'(t)$
$i = \frac{1}{R}e_s + \frac{1}{L}\int_0^t e_s(t')\,dt'$
$\frac{1}{R}u(t) + \frac{1}{L}r(t)$
Slope
$\frac{1}{R}\delta(t) + \frac{1}{L}u(t)$

Παράδειγμα 1



Λύση

$$C\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{R}=i_s(t)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}+\frac{1}{RC}\alpha(t)=\frac{1}{C}$$

$$v_C(0^-)=v_C(0^+)$$

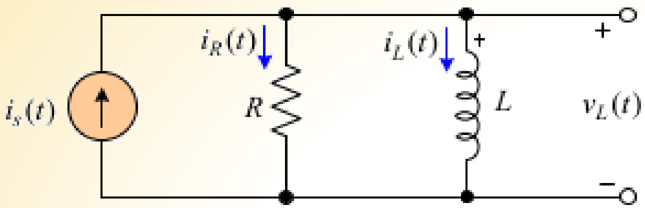
$$\alpha(t)=R\left[1-e^{-t/RC}\right]u(t)$$

$$h(t)=\frac{d\alpha(t)}{dt}=R\delta(t)+\frac{1}{C}e^{-t/RC}u(t)-Re^{-t/RC}\delta(t)$$

$$h(t)=R+\frac{1}{C}e^{-t/RC}u(t)-Re^{-0/RC}=\frac{1}{C}e^{-t/RC}u(t)$$

Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 5.23 Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του RL κυκλώματος του σχήματος 5.71, αν ως απόκριση θεωρείται η τάση $v_L(t)$.



Σχήμα 5.71

Λύση

Με εφαρμογή του ΝΡΚ βρίσκουμε ότι

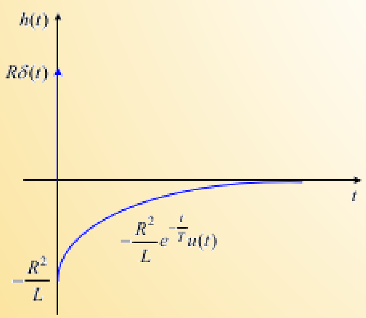
$$\frac{v_L}{R} + i_L = i_s$$

θέτουμε $i_s(t) = u(t)$ και επειδή $v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ θα έχουμε

$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 1, \text{ για } t > 0$$

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος ισούται με $T = L/R$. Η λύση της δ.ε. με $i_L(0^-) = 0$ δίνεται από τη σχέση

$$i_L(t) = \left(1 - e^{-t/T}\right)u(t)$$



Σχήμα 5.72 Κρουστική απόκριση.

Η τάση $v_L(t)$ ισούται με

$$v_L(t) = \alpha(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = \mathrm{Re}^{-t/T}\,u(t)$$

Συνεπώς

$$h(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = R\delta(t)e^{-t/T} - \frac{R^2}{L}e^{-t/T}u(t)$$

Επειδή

$$R\delta(t)e^{-t/T} = \begin{cases} R\delta(t) & \text{για} \quad t = 0 \\ 0 & \text{για} \quad t > 0 \end{cases}$$

Συνελεκτικό Ολοκλήρωμα

Αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση ενός κυκλώματος, μπορούμε να βρούμε την απόκριση σε κάθε είσοδο με το **Συνελεκτικό Ολοκλήρωμα**.

Αν x(t) είναι είσοδος του κυκλώματος, y(t) η απόκριση του και h(t) η κρουστική απόκριση, τότε:

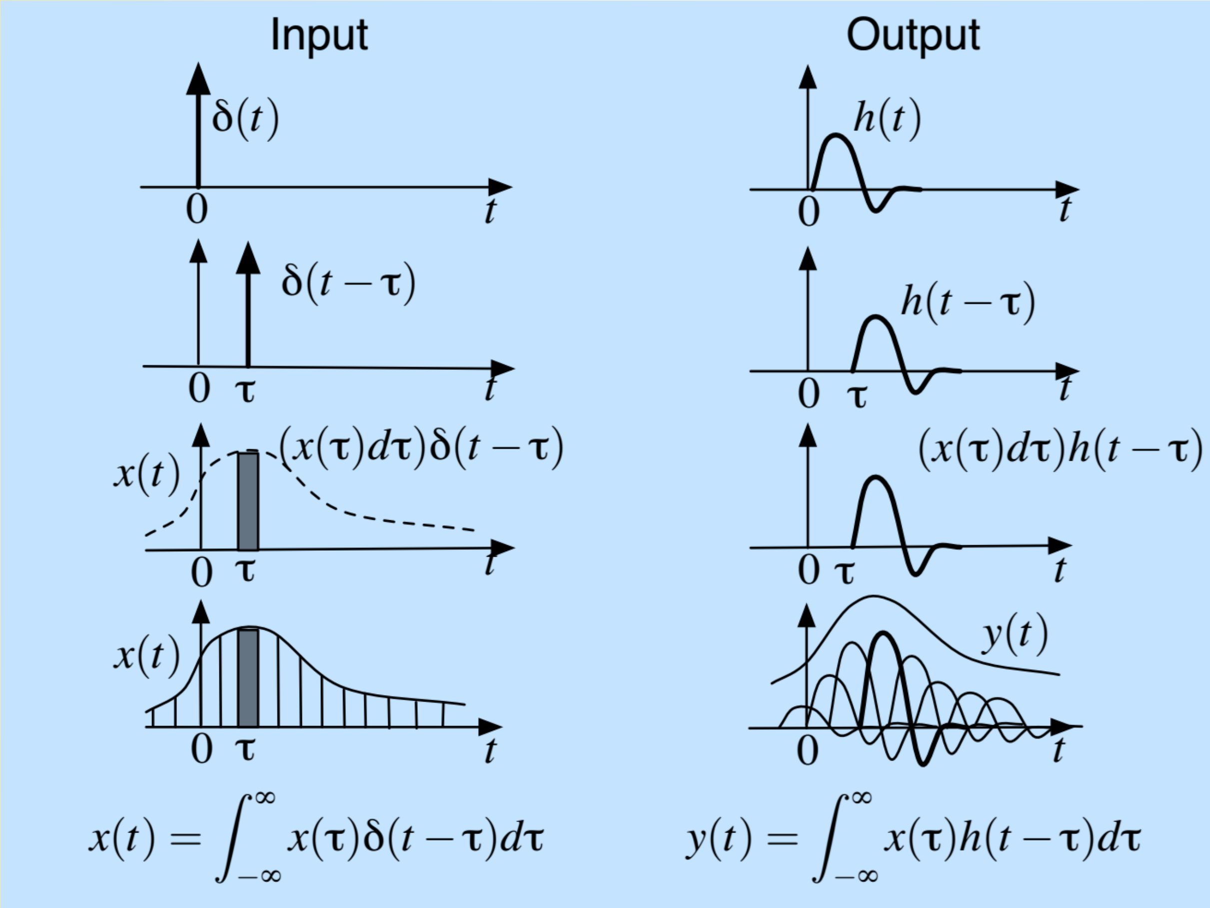
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Συνελεκτικό Ολοκλήρωμα

$$y(t)=h(t)*x(t)=x(t)*h(t)$$

Συνέλιξη

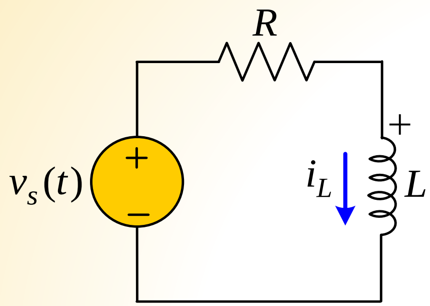
Συνέλιξη



$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Παράδειγμα 3

(α) Βρείτε την κρουστική απόκριση του κυκλώματος αν ως έξοδος είναι το $i_L(t)$. (β) Το ρεύμα $i_L(t)$ για $t>0$ αν $v_s(t)=e^{-t}u(t)$ και $i_L(0-)=0$.



Λύση

$$v_s(t)=u(t) \Rightarrow L\frac{di_L(t)}{dt}+Ri_L(t)=1$$

$$\Rightarrow i_L(t)=a(t)=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)u(t)$$

Εύρεση κρουστικής απόκρισης:

$$h(t)=\frac{da(t)}{dt}=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)-\frac{1}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\delta(t)+\frac{1}{R}\delta(t)$$

Όμως

$$\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\delta(t)=0 \qquad \Rightarrow h(t)=\frac{da(t)}{dt}=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$$

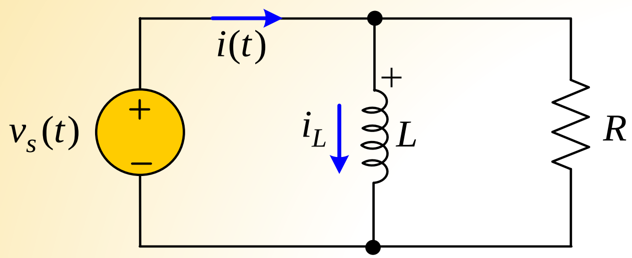
Υπολογισμός απόκρισης:

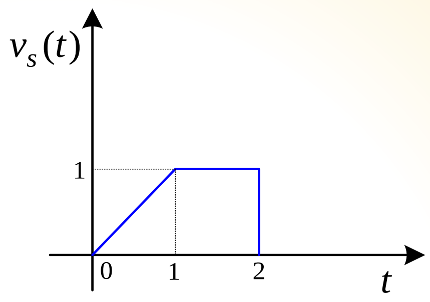
$$\Rightarrow i_L(t)=\int_0^t\frac{1}{L}e^{-(t-\tau)\frac{R}{L}}e^{-\tau}d\tau=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t e^{\left(\frac{R}{L}-1\right)\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow i_L(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{1}{\frac{R}{L}-1}e^{\left(\frac{R}{L}-1\right)\tau}\right]\Bigg|_0^t=\frac{1}{R-L}\left[e^{-t}-e^{-\frac{R}{L}t}\right]u(t)$$

Παράδειγμα 4

Βρείτε $την\ απόκριση$ μηδενικής $κατάστασης\ για\ το\ ρεύμα\ i(t)$ για $t > 2\ sec$.





Λύση

$$i(t) = \frac{v_s(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v_s(t)dt$$

$$v_s(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L}t\,u(t)$$

Εύρεση κρουστικής απόκρισης:

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt} = \frac{1}{R}\delta(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Είναι

$$v_s(t) = \begin{cases} t & \text{για} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{για} \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{για} \quad t < 0 \text{ και } t > 2 \end{cases}$$

Υπολογισμός απόκρισης για $0 < t \le 1$ sec:

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)v_s(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{R}\delta(\tau) + \frac{1}{L}u(\tau)\right)(t-\tau)d\tau = \frac{1}{R}\int_0^t \delta(\tau)(t-\tau)d\tau + \frac{1}{L}\int_0^t (t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{R}(t-\tau)\Big|_{\tau=0} - \frac{1}{L}\frac{(t-\tau)^2}{2}\Bigg|_0^t = \frac{t}{R} + \frac{t^2}{2L}$$

Υπολογισμός απόκρισης για $1 \le t \le 2$ sec:

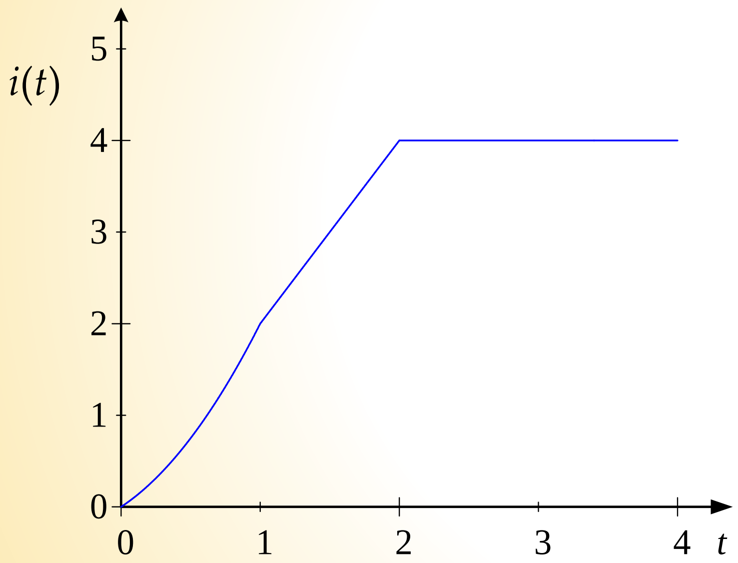
$$i(t) = \left[\frac{t}{R} + \frac{t^2}{2L}\right]\Bigg|_0^1 + \int_1^t \left(\frac{1}{R}\delta(\tau) + \frac{1}{L}u(\tau)\right)d\tau$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{1}{2L} + \frac{1}{L}\int_1^t d\tau = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2L}\right) + \frac{1}{L}t$$

Υπολογισμός απόκρισης για $t > 2$ sec:

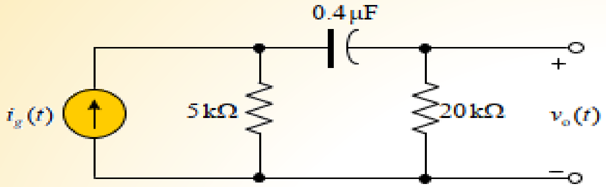
$$i(t) = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2L}\right) + \left[\frac{1}{L}t\right]\Bigg|_0^2 + \int_2^t h(\tau)\cdot 0\, d\tau = \frac{1}{R} + \frac{3}{2L}$$

Η γραφική παράσταση της απόκρισης $i(t)$ για $R = 1\Omega$ και $L = 0.5\text{H}$.

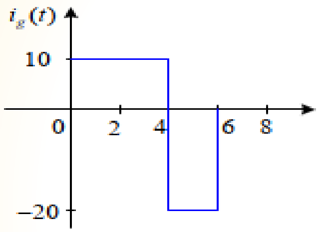


Άσκηση 7.7

Το κύκλωμα του Σχ. 1 διεγείρεται από μια πηγή ρεύματος που παράγει την κυματομορφή του Σχ. 2. Να προσδιοριστεί η απόκριση του κυκλώματος για $t = 5\,\text{msec}$ με τη χρήση συνέλιξης.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

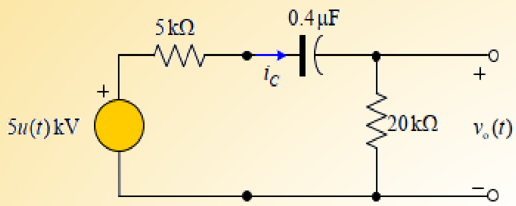
Λύση

Θα προσδιορίσουμε αρχικά τη βηματική απόκριση του κυκλώματος. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι η $i_g(t) = u(t)$. Από το ισοδύναμο κύκλωμα του Σχ. 3 έχουμε

$$25000 i_C + v_C = 5000$$

$$\Rightarrow 25000 \times 0.4 \times 10^{-6} \frac{dv_C}{dt} + v_C = 5000$$

$$\Rightarrow \frac{dv_C}{dt} + 100 v_C = 5 \times 10^5$$



Σχήμα 3

Συνεπώς

$$\Rightarrow v_C(t) = 5000\left(1 - e^{-100t}\right)\text{V}$$

Το ρεύμα $i_C(t)$ θα είναι ίσο με

$$i_C(t) = 0.4\times10^{-6}\frac{dv_C(t)}{dt} = 0.2e^{-100t}\,\text{A}$$

Άρα, η βηματική απόκριση του κυκλώματος είναι

$$a(t) = 2000 i_C(t) = 4e^{-100t}u(t)\,\text{kV}$$

Η κρουστική απόκριση βρίσκεται τώρα με παραγώγιση της $a(t)$:

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt} = -400000e^{-100t}u(t) + 4000e^{-100t}\delta(t)$$

Όμως

$$e^{-100t}\delta(t) = \delta(t)$$

οπότε

$$h(t) = -400000e^{-100t}u(t) + 4000\delta(t)$$

Για την εύρεση της απόκρισης του κυκλώματος για $t = 5\text{msec}$ εφαρμόζουμε συνέλιξη της διέγερσης με την κρουστική απόκριση:

$$v_o(t) = \int_0^t i_g(\tau)\left[-400000e^{-100(t-\tau)}u(t-\tau) + 4000\delta(t-\tau)\right]d\tau$$

Συνεπώς

$$v_o(0.005) = 4000\int_{0^-}^{0.004} 0.01\left[-100e^{-100(0.005-\tau)}u(0.005-\tau) + \delta(0.005-\tau)\right]d\tau$$

$$+4000\int_{0.004}^{0.005} -0.02\left[-100e^{-100(0.005-\tau)}u(0.005-\tau) + \delta(0.005-\tau)\right]d\tau$$

Η παραπάνω σχέση γίνεται

$$v_o(0.005) = 40\int_{0^-}^{0.004} -100e^{-100(0.005-\tau)} + \delta(0.005-\tau)d\tau$$

$$-80\int_{0.004}^{0.005} -100e^{-100(0.005-\tau)} + \delta(0.005-\tau)d\tau$$

Όμως

$$40\int_{0^-}^{0.004} -100e^{-100(0.005-\tau)} + \delta(0.005-\tau)d\tau$$

$$= \frac{40}{0.005-\tau}e^{-100(0.005-\tau)}\Big|_0^{0.004} + 0 = -11.932$$

και

$$-80\int_{0.004}^{0.005} -100e^{-100(0.005-\tau)} + \delta(0.005-\tau)d\tau$$

$$= \frac{8000}{-100}e^{-100(0.005-\tau)}\Big|_{0.004}^{0.005} - 80 = -72.387$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε τελικά ότι

$$v_o(0.005) = -11.932 - 72.387 = -84.319\text{V}$$

Άσκηση 7.8

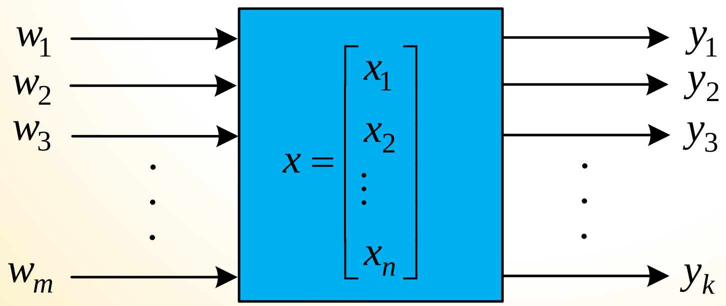
(α) Να προσδιοριστεί η βηματική και η κρουστική απόκριση του κυκλώματος αν ως απόκριση θεωρηθεί το ρεύμα $i(t)$.

Εξισώσεις Κατάστασης

Μεταβλητές Κατάστασης: Βοηθητικές μεταβλητές, με τις οποίες ορίζονται πρωτοβάθμιες ΔΕ που περιγράφουν το κύκλωμα.

Μεταβλητές Κατάστασης:
- Τάσεις Πυκνωτών
- Ρεύματα Πηνίων

Έστω $\underline{x}(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \ldots. \quad x_n(t)\right]^T$ και $\underline{\dot{x}}(t) = \left[\dot{x}_1(t) \quad \dot{x}_2(t) \quad \ldots. \quad \dot{x}_n(t)\right]^T$



Εξισώσεις Κατάστασης

Με τους ΝΡΚ και ΝΤΚ, περιγράφουμε το κύκλωμα:

Οι έξοδοι δίνονται από

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{w} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{w}\end{aligned}}$$

είσοδοι

Κανονική μορφή Εξισώσεων Κατάστασης

Αρχικές Συνθήκες $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nm} \end{bmatrix}$$

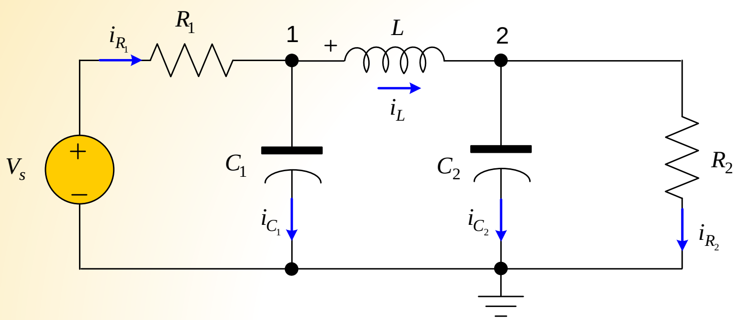
όπου τα C και D είναι πίνακες διαστάσεων $k \times n$ και $k \times m$, αντίστοιχα

Οι αρχικές συνθήκες του κυκλώματος είναι οι αρχικές συνθήκες των εξισώσεων κατάστασης και αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης. Δηλαδή, οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = t_0$ συμβολίζονται ως εξής

$$x(t_0) = x_0$$

Παράδειγμα I

Παράδειγμα 5.26 Να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κατάστασης για το τρίτης τάξης κύκλωμα του Σχήματος 5.72. Πώς περιγράφεται η απόκριση του κυκλώματος αν ως απόκριση θεωρήσουμε το ρεύμα $i_{R_2}(t)$; ¶



Λύση

Η εξίσωση στον κόμβο 1, δίνει

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = i_{R_1} - i_L$$

Όμως

$$i_{R_1} = \frac{1}{R_1}\left(v_s - v_{C_1}\right)$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_{C_1} - \frac{1}{C_1} i_L + \frac{1}{R_1 C_1} v_s$$

Στον κόμβο 2 έχουμε

$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = i_L - \frac{v_{C_2}}{R_2}$$

ή

$$\frac{dv_{C_2}}{dt} = -\frac{1}{C_2 R_2} v_{C_2} + \frac{1}{C_2} i_L$$

Επίσης, η διαφορά δυναμικού στο πηνίο δίνει τη σχέση

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_{C_1} - \frac{1}{L} v_{C_2}$$

Θεωρούμε τώρα ως μεταβλητές κατάστασης το διάνυσμα

$$x = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

οπότε, από τις τρεις δ.ε. που προσδιορίσαμε προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις κατάστασης

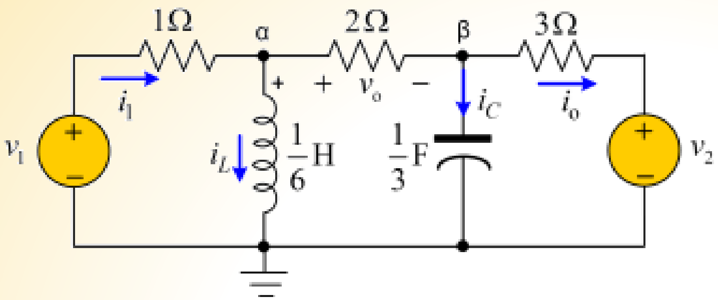
$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s$$

Τώρα, για την απόκριση $y = i_{R_2}(t)$ εύκολα βρίσκεται ότι αυτή ισούται με

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] v_s$$

Άσκηση 8.2

Στο κύκλωμα του Σχ. 1 να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κατάστασης καθώς και οι εξισώσεις εξόδου αν ως αποκρίσεις θεωρήσουμε τα $v_o(t)$ και $i_o(t)$.



Σχήμα 1

Λύση

ΟΙ εξισώσεις στους κόμβους α και β έχουν τη μορφή

$$v_1 - \frac{1}{6}\frac{di_L}{dt} = i_L + \frac{\frac{1}{6}\frac{di_L}{dt} - v_C}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{6}\frac{di_L}{dt} - v_C}{2} = \frac{1}{3}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C - v_2}{3} \qquad (2)$$

Λύνουμε την (1) ως προς i_L:

$$\frac{di_L}{dt} = 2v_C - 4i_L + 4v_1 \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε τώρα το $\frac{di_L}{dt}$ από την (3) στην (2) και παίρνουμε

$$\frac{\frac{1}{6}(2v_C - 4i_L + 4v_1) - v_C}{2} = \frac{1}{3}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C - v_2}{3} \tag{4}$$

Λύνουμε ως $\frac{dv_C}{dt}$

$$\frac{dv_C}{dt} = -2v_C - i_L + v_1 - v_2 \tag{5}$$

Οι σχέσεις (3) και (5) συνιστούν τις ακόλουθες εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τώρα το διάνυσμα των μεταβλητών εξόδου παρατηρούμε ότι

$$v_o = v_L - v_C = \frac{1}{6}\frac{di_L}{dt} - v_C \overset{(3)}{\Rightarrow} v_o = \frac{1}{6}\left(2v_C - 4i_L + 4v_1\right) - v_C \tag{7}$$

και

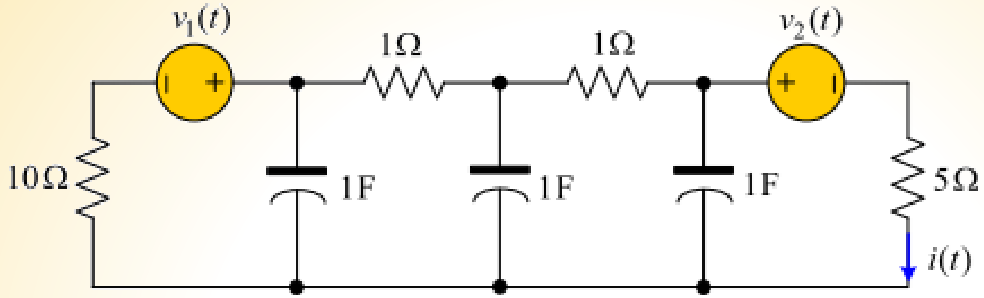
$$i_o = \frac{v_C - v_o}{3} \tag{8}$$

Συνδυάζουμε τις σχέσεις (7) και (8) οπότε προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Άσκηση 8.5

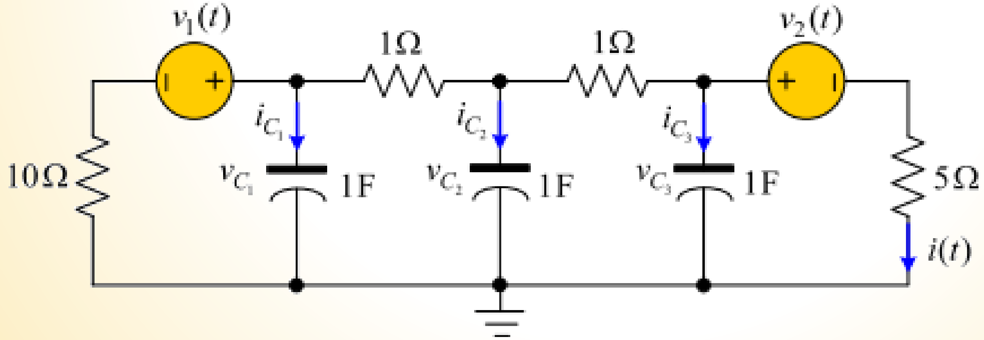
Να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης για το παρακάτω κύκλωμα. Πώς εκφράζεται το ρεύμα $i(t)$ συναρτήσει των μεταβλητών κατάστασης;



Σχήμα 1

Λύση

Αναφερόμενοι στο Σχήμα 2 θεωρούμε ως μεταβλητές κατάστασης τα v_{C_1}, v_{C_2} και v_{C_3}.



Σχήμα 2

$$\frac{v_{C_1}-v_1}{10}+\frac{dv_{C_1}}{dt}+v_{C_1}-v_{C_2}=0$$

$$v_{C_2}-v_{C_1}+\frac{dv_{C_2}}{dt}+v_{C_2}-v_{C_3}=0$$

$$v_{C_3}-v_{C_2}+\frac{dv_{C_3}}{dt}+\frac{v_{C_3}-v_2}{5}=0$$

Λύνουμε τις παραπάνω σχέσεις ως προς τα διαφορικά, οπότε

$$\frac{dv_{C_1}}{dt}=-\frac{11}{10}v_{C_1}+v_{C_2}+\frac{1}{10}v_1$$

$$\frac{dv_{C_2}}{dt}=+v_{C_1}-2v_{C_2}+v_{C_3}$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt}=v_{C_2}-\frac{6}{5}v_{C_3}+\frac{1}{5}v_2$$

Εξάλλου, η απόκριση $i(t)$ εκφράζεται ως

$$i(t)=-\frac{1}{5}v_{C_3}+\frac{1}{5}v_2$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, οι εξισώσεις κατάστασης είναι

$$\begin{bmatrix}\frac{dv_{C_1}}{dt}\\ \frac{dv_{C_2}}{dt}\\ \frac{dv_{C_3}}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{11}{10} & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & -\frac{6}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ v_{C_3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

ενώ η απόκριση του κυκλώματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$i=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{C_1}\\ v_{C_2}\\ v_{C_3}\end{bmatrix}+\frac{1}{5}v_2$$